This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909530 9

5772

LEITFADEN

DER

EBENEN GEOMETRIE

MIT BENUTZUNG

NEUERER ANSCHAUUNGSWEISEN FÜR DIE SCHULE

BEARBEITET VON

Dr. HUBERT MÜLLER,

OBERLEHRER AM KAISERLICHEN LYCEUM IN METZ,
FRÜHER AUSSERORDENTLICHER PROFESSOR DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT FREIBURG I. B.

IN ZWEI TEILEN UND EINEM ANHANGE.

I. DIE GERADLINIGEN FIGUREN UND DER KREIS. ANHANG ZU I. HARMONISCHE PUNKTE ETC., POTENZLINIEN, POL UND POLARE. KREISBERÜHRUNGEN UND BRENNPUNKTSEIGENSCHAFTEN DER KEGELSCHNITTE.
II. DIE ELEMENTE DER NEUERN GEOMETRIE UND DIE THEORIE DER KEGELSCHNITTE.

ERSTER TEIL. ERSTES HEFT.

DIE GERADLINIGEN FIGUREN UND DER KREIS. MIT ÜBUNGEN.

DRITTE AUFLAGE.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1889.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
222786B
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R Reference L

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage.

Es ist schon vielfach bemerkt worden, dafs die Geometrie der Alten, sowohl in Bezug auf die Einheit des Systemes als in Bezug auf die Anregung und Bildung der Vorstellungskraft weit hinter der Geometrie der Lage, die auch als neuere Geometrie bezeichnet wird, zurücksteht.

Der hieraus entsprungene Wunsch, Teile aus der Geometrie der Lage für die Schule zu verwenden, hat mehreren schätzenswerten Werken über das Grenzgebiet der alten und neuern Geometrie die Entstehung gegeben und ist die Veranlassung davon, dafs in vielen Schulbüchern die der neuern Geometrie verwandten Teile mit Vorliebe behandelt werden. Der auf diese Weise gewonnene Einflufs dieser Disziplin auf die Schule kommt jedoch nicht allen Anstalten zu Gute, weil vielfach die Zeit fehlt, um sich in den betreffenden Kapiteln mit Mufse umzusehen. Ich habe nun in dieser Arbeit von Anfang an versucht, so viel es mir möglich schien, Anschauungsweisen, welche der Geometrie der Lage entnommen sind, in den Lehrstoff einzuflechten.

Indem ich dieses Schulbuch der Beurteilung meiner Fachkollegen übergebe, kann ich nicht umhin eines Gutachtens Erwähnung zu thun, mit welchem mich mein unvergefslicher Lehrer, der in Göttingen verstorbene Professor Dr. Alfred Clebsch, zur Herausgabe der Arbeit aufmunterte. Derselbe sprach sich dahin aus, dafs eine Umbildung vieler Teile der in den Schulen gelehrten Geometrie an der

Hand der neuern Geometrie ein Bedürfnis der Zeit sei, dafs er vorliegenden Leitfaden als eine willkommene Gabe für die Schule betrachte und das Erscheinen desselben in Tendenz und Inhalt freudig begrüfsen würde. Ich wünsche, dafs die Ansicht eines wissenschaftlich so hoch stehenden Mannes eine gute Vorbedeutung für den Erfolg des Büchleins sein möge.

Metz, im März 1874.

Dr. **H. Müller.**

Vorwort zur dritten Auflage.

Wie in der Vorrede zur zweiten Auflage, so sei auch jetzt wieder auf die Resolution hingewiesen, mit welcher auf der 31. Versammlung deutscher Schulmänner und Philologen die Methode dieses Leitfadens gebilligt wurde:

„Im Unterricht der Elementargeometrie an Realschulen und Gymnasien bleibt die Euklidische Geometrie dem System nach bestehen, wird aber im Geiste der neueren Geometrie reformiert. — Die Sektion begrüfst mit grofser Freude die von Dr. H. Müller eingeleiteten Schritte."

Es ist in neuerer Zeit von verschiedenen Seiten darauf hingewiesen worden, dafs es wünschenswert sei, der neueren synthetischen Geometrie Eingang in den Schulen zu verschaffen, so z. B. in der Rektoratsrede des Herrn Prof. Dr. Th. Reye in Strafsburg im Mai 1886. In Bezug auf diese Bestrebungen möchte ich nochmals die Punkte aufzählen, in welchen dieser Leitfaden, wenn er auch am Euklidischen Lehrstoffe festhält, nach dem Geiste der neueren Geometrie bearbeitet ist.

1) Das Prinzip der Starrheit ist beseitigt. Diese Beseitigung ist allerdings bei den gebräuchlichsten gegenwärtigen Lehrbüchern schon in einigen Definitionen und in der Form mancher Sätze angenommen; aber dieselbe ist in diesen Schriften nicht durchgeführt*), wodurch ein Mangel an Konsequenz entsteht.

*) Siehe meine Broschüre: „Besitzt die heutige Schulgeometrie noch die Vorzüge des Euklidischen Originals?" Metz bei G. Scriba.

2) Die eindeutigen Konstruktionen sind zur Folgerung von Lehrsätzen verwendet, wie es in der neueren Geometrie, nicht aber in der Euklidischen Geometrie geschieht.
3) Wie die neuere Geometrie sich mit der Verwandtschaft der Figuren beschäftigt, so sind hier die Kongruenz (Symmetrie) und Ähnlichkeit als einfachste Verwandtschaften behandelt und zur Ableitung von Sätzen herangezogen worden..
4) Bei der Symmetrie wie bei der Ähnlichkeit der Figuren ist der auch für die Schulgeometrie wichtige Übergang von den geschlossenen Figuren zu den Punktsystemen durchgeführt.

In dieser dritten Auflage finden sich viele Verbesserungen und Vereinfachungen (z. B. in der Parallelentheorie), welche einzeln aufzuzählen zu weitläufig wäre. Die Paragraphen 10 und 11 über Symmetrie sind weggefallen. Dagegen ist die Konstruktion und Kongruenz der Dreiecke aus den Übungen in den Haupttext aufgenommen (§ 18 und 19). Dadurch ist mehr Gleichmafs hergestellt, während früher die Symmetrie zu viel Raum beanspruchte. In den „Übungen“ ist eine grofse Anzahl von Konstruktionsaufgaben in bereits vorhandene Nummern eingefügt worden.

Metz, im Mai 1889.

Dr. **H. Müller.**

Inhaltsverzeichnis.

Seite

I. Abschnitt. Die Grundgebilde 1

§ 1. Lagen von Punkten und Geraden. — 2. Winkel und Strecken. — 3. Symmetrie in Bezug auf eine Achse. — 4. Symmetrie in Bezug auf einen Punkt. — 5. Nebenwinkel und Scheitelwinkel. — 6. Sätze über symmetrische Figuren. — 7. Winkelbezeichnungen. — 8. Parallele Linien. — 9. Fortsetzung.

II. Abschnitt. Entstehung von Figuren und allgemeine Eigenschaften derselben 10

§ 10. Dreieck und Dreiseit. — 11. Allgemeine Sätze über das Dreieck. — 12. Fortsetzung. — 13. Viereck und Vierseit. — 14. Einfache Vielecke. — 15. Der Kreis. Lagen einer Geraden gegen denselben. — 16. Symmetriesätze.. — 17. Zwei Kreise. — 18. Begriff und Anwendung der geometrischen Örter. — 19. Die vier Fundamentalkonstruktionen des Dreiecks; die vier Kongruenzsätze. — 20. Geometrische Örter. — 21. Fortsetzung. — 22. Aufgaben. — 23. Winkel und Bogen. — 24. Peripheriewinkel. Sehnen- und Sekantenwinkel. — 25. Geometrischer Ort. Aufgaben.

III. Abschnitt. Die besonderen Vielecke 28

§ 26. Das gleichschenklige Dreieck. — 27. Das symmetrische Vierseit (Deltoïd). — 28. Konstruktion von Vierecken. — 29. Das Parallelogramm. — 30. Die besonderen Parallelogramme. — 31. Sehnenviereck und Tangentenviereck. — 32. Regelmäfsige Vielecke. — 33. Der Kreis als Grenzfigur regelmäfsiger Vielecke.

IV. Abschnitt. Von der Fläche der Figuren 37

§ 34. Flächen, welche kongruent sind oder sich aus kongruenten Stücken zusammensetzen. — 35. Berechnung der Flächen von Rechtecken und Dreiecken. — 36. Flächen von Parallelogrammen, Trapezen, Tangentenvielecken. — 37. Folgerungen aus § 36. Verhältnisse von Flächen. — 38. Der pythagoreische Lehrsatz. Aufgaben. — 39. Die Quadrate der Seiten schiefwinkliger Dreiecke.

Seite

V. Abschnitt. Ähnliche Punktreihen 42
§ 40. Schnitt eines Winkels mit Parallelen. — 41. Ähnliche Punktreihen auf konvergenten Trägern. — 42. Aufgaben. — 43. Ähnliche Punktreihen auf parallelen Trägern. — 44. Anwendungen. — 45. Die Halbierungslinien der Dreieckswinkel. — 46. Anwendungen.

VI. Abschnitt. Ähnlichkeit der Figuren 51
§ 47. Ähnliche Figuren. — 48. Eigenschaften ähnlicher Figuren. — 49. Ähnliche Dreiecke. — 50. Kreise als ähnliche Figuren. — 51. Anwendungen auf das rechtwinklige Dreieck. — 52. Anwendungen auf die Kreislehre.

VII. Abschnitt. Kreisberechnung 62
§ 53. Aufgaben zur Berechnung regelmäfsiger Vielecke. — 54. Die Peripherie des Kreises. — 55. Berechnung von π.

VIII. Abschnitt. Hilfssätze aus der Arithmetik 65
§ 56. Das Messen der Gröfsen. — 57. Das Verhältnis gleichartiger Gröfsen. — 58. Die Proportionen. — 59. Ersetzung der Proportionen durch Gleichungen, welche einen Proportionalitätsfaktor enthalten. — 60. Proportionalitätssatz.

I. Abschnitt.

Die Grundgebilde.

Lagen von Punkten und Geraden. § 1.

Der Punkt und die gerade Linie sind die Grundgebilde der Planimetrie. Die Eigenschaften derselben sind Grundsätze dieser Wissenschaft und bedürfen keines Beweises.

a) Es giebt unendlich viele Gerade einer Ebene, welche durch einen Punkt derselben gehen.

Die Gesamtheit dieser Geraden bildet einen Strahlenbüschel. Der gegebene Punkt wird der Scheitel des Strahlenbüschels genannt.

b) Es giebt nur eine Gerade, welche durch zwei Punkte zugleich geht, die Verbindungslinie dieser Punkte.

α) Es giebt unendlich viele Punkte, welche auf einer Geraden liegen.

Die Gesamtheit dieser Punkte bildet eine Punktreihe. Die gegebene Gerade wird der Träger dieser Punktreihe genannt.

β) Es giebt nur einen Punkt, welcher auf zwei Geraden zugleich liegt, nämlich der Schnittpunkt dieser Geraden.

Winkel und Strecken. § 2.

a) Zwei Gerade, welche sich schneiden, teilen die Ebene in 4 Felder, welche Winkel genannt werden (Fig. 1). Der

α) Zwei Punkte einer Geraden begrenzen ein Stück derselben, welches Strecke genannt wird (Fig. 3). Die Gerade,

Fig. 1.

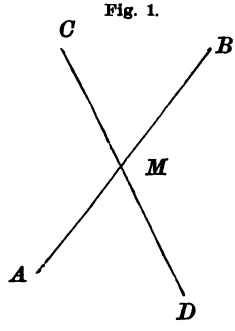


Fig. 2.

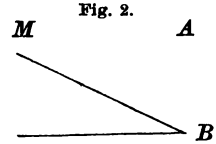


Fig. 3.

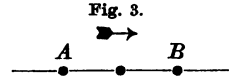
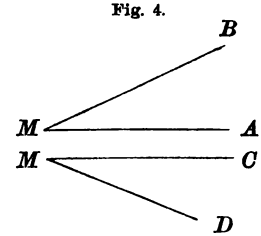


Fig. 4.



Schnittpunkt der Geraden ist der Scheitelpunkt der 4 Winkel. MA und MB (Fig. 2) sind die Schenkel des Winkels AMB oder BMA.

b) Der Winkel wird durch Drehung beschrieben, wenn sich der eine Schenkel (Anfangsschenkel) um den Scheitel dreht, bis er mit dem andern Schenkel (Endschenkel) zusammenfällt.

welche die beiden Punkte enthält, heifst der Träger der Strecke. Die Punkte A und B sind die Endpunkte der Strecke AB oder BA.

β) Die Strecke AB wird von dem Punkte A (Anfangspunkt) beschrieben, wenn derselbe den geradlinigen Weg Weg von A bis B (Endpunkt der Strecke) zurücklegt.

Anmerkung. Man gebraucht die Schreibweise AMB oder BMA, je nachdem man MA oder MB als Anfangsschenkel des Winkels in Fig. 2 ansieht. Zwei Winkel heifsen von einerlei Sinn, wenn die Anfangsschenkel beider Winkel sich in gleichem Sinne drehen müssen, um mit den Endschenkeln zusammenzufallen. Im andern Falle sind die Winkel von entgegengesetztem Sinne. Die Winkel AMB und DMC in Fig. 4 sind gleichen Sinnes, dagegen die Winkel AMB und CMD von entgegengesetztem Sinne. Man gebraucht die Schreibweise AB oder BA, je nachdem man annimmt, dafs die Strecke in Fig. 3 durch Bewegung von A nach B oder durch Bewegung von B nach A beschrieben wird. Die Strecken AB und BA haben entgegengesetzte Richtung.

c) Der „Vollwinkel“ wird durch eine ganze Umdrehung beschrieben (wenn sich der Schenkel MA in Fig. 1 durch die Lagen MC, MB, MD dreht, bis er wieder nach MA fällt); seine Schenkel fallen zusammen.

Der „gestreckte Winkel“ wird durch eine halbe Umdrehung beschrieben (wenn sich MA in Fig. 1 durch die Lage MC dreht, bis die Lage MB erreicht ist); seine Schenkel haben entgegengesetzte Richtung.

Der „rechte Winkel“ wird durch eine Viertelumdrehung beschrieben; er ist die Hälfte des gestreckten Winkels; von seinen Schenkeln sagt man, dafs sie „senkrecht“ auf einander stehen.

d) Als Einheit für das Messen (§ 56) der Winkel nimmt man den Grad (^{0}), d. h. einen Winkel, der 360mal in dem Vollwinkel aufgeht. Der Grad wird in 60 Minuten ($'$) und die Minute in 60 Sekunden ($''$) geteilt. Als Einheit für das Messen der Strecken dient das Meter (m). Das Meter wird

in 10 Decimeter (*dm*), das Decimeter in 10 Centimeter (*cm*) und das Centimeter in 10 Millimeter (*mm*) geteilt.

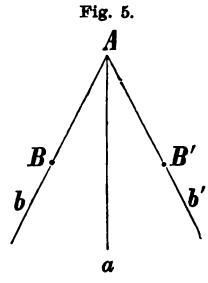
Der gestreckte Winkel enthält 180^0, der rechte Winkel 90^0. „Hohle Winkel" heifsen diejenigen, deren Gradzahl zwischen 0 und 180 liegt. „Erhabene Winkel" heifsen die Winkel, deren Gradzahl zwischen 180^0 und 360^0 liegt. Die hohlen Winkel heifsen „spitz", wenn sie kleiner als 90^0 und „stumpf", wenn sie gröfser als 90^0 sind.

e) Supplementwinkel sind solche Winkel, deren Summe gleich einem gestreckten Winkel ist. Zu dem Winkel von x Grad gehört der Winkel von $180 - x$ Grad als Supplementwinkel. Komplementwinkel sind solche Winkel, deren Summe gleich einem rechten Winkel ist. Zu dem Winkel von x Grad gehört der Winkel von $90 - x$ Grad als Komplementwinkel.

Symmetrie in Bezug auf eine Achse. § 3.

a) Wenn man einen Winkel (BAB' in Fig. 5) um seine Halbierungslinie a umklappt, so fällt jeder der beiden Schenkel AB und AB' in die frühere Lage des andern. Wenn die Punkte B und B' dieser Schenkel vom Scheitel A gleiche Entfernung haben, so deckt auch jeder dieser Punkte die frühere Lage des andern.

Fig. 5.



Hieraus folgt auch, dafs die ganze Figur nach dem Umklappen um die Linie a ihre frühere Lage deckt; denn die Gerade a ändert dabei ihren Ort nicht, die Geraden b und b' vertauschen ihre Lage und die Punkte B und B' thun dasselbe.

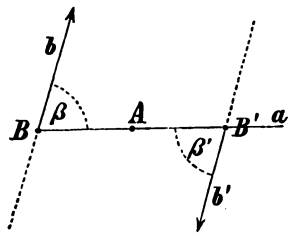
b) Eine Figur, welche nach dem Umklappen um eine Gerade a ihre frühere Lage deckt, heifst symmetrisch für diese Gerade a als Achse. Zwei Stücke, welche (wie die Geraden b und b', die Punkte B und B') durch das Umklappen ihre Lagen vertauschen, heifsen symmetrisch entsprechend (auch homolog) für die Achse.

Anmerkung. Das Auf- und Zuklappen eines Buches führt zur Veranschaulichung dieser Symmetrie. Nur bleibt dabei die eine Hälfte der Ebene in ihrer früheren Lage liegen, und anstatt zu sagen: der Punkt B deckt die frühere Lage von B', mufs man sagen: der Punkt B deckt den Punkt B'.

§ 4. Symmetrie in Bezug auf einen Punkt.

a) Wenn man die Strecke BB' (Fig. 6) um ihren Mittelpunkt halb herum dreht, so fällt jeder der Punkte B und B' in die frühere Lage des andern. Wenn die Geraden b und b' durch diese Punkte unter gleichen Winkeln (Wechselwinkel nach § 7) gezogen sind, so deckt auch jede dieser Geraden die frühere Lage der andern.

Fig. 6.



Hieraus folgt auch, dafs die ganze Figur nach der halben Umdrehung um A ihre frühere Lage deckt, denn der Punkt A bleibt an seiner Stelle, die Gerade BB' fällt in ihre alte Lage, die Punkte B und B', sowie die Geraden b und b' vertauschen ihre Lagen.

b) Eine Figur, welche nach einer halben Umdrehung in der Ebene um einen Punkt A ihre frühere Lage deckt, heifst symmetrisch für diesen Punkt als Mittelpunkt. Zwei Stücke, welche (wie die Punkte B und B' oder die Geraden b und b') durch die halbe Umdrehung ihre Lagen vertauschen, heifsen symmetrisch entsprechend für den Mittelpunkt.

Durch die halbe Umdrehung um A kommt der obere Teil (über BB' gelegen) der Fig. 6 in die frühere Lage des unteren Teiles. Wenn daher die Geraden b und b' sich über BB' schnitten, so müfsten sie sich unterhalb BB' noch einmal schneiden, was nach § 1 unmöglich ist.

c) Zwei gerade Linien (wie b und b' in Fig. 6) heifsen parallel, wenn sie einander nicht schneiden, so weit man sie auch verlängern mag.

§ 5. Nebenwinkel und Scheitelwinkel.

a) Zwei Winkel heifsen Nebenwinkel, wenn sie den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben, während die andern Schenkel in entgegengesetzte Richtung fallen.

b) Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich einem gestreckten Winkel oder 180^0. Wenn zwei Nebenwinkel gleich sind, so ist jeder ein Rechter.

Zum Beweis der ersten Behauptung denke man sich in Fig. 7 den Schenkel SA fort.

c) Zwei Winkel heifsen Scheitelwinkel, wenn sie den

Scheitel gemeinsam haben, während die Schenkel paarweise in entgegengesetzte Richtung fallen.

d) Scheitelwinkel sind einander gleich.

Fig. 7.

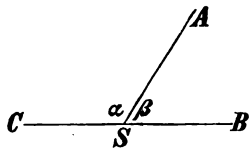


Fig. 8.

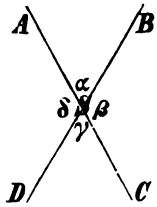
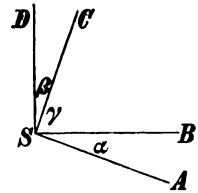


Fig. 9.



Beweis. Die Scheitelwinkel α und γ in Fig. 8 sind einander gleich; denn als Nebenwinkel von β betragen beide $180^0 - \beta$.

e) Zwei Winkel sind gleich, wenn ihre Schenkel paarweise nach einerlei Seite auf einander senkrecht stehen.

Beweis. Die Anfangsschenkel der Winkel α und β in Fig. 9 mögen den rechten Winkel ASC, die Endschenkel den rechten Winkel BSD bilden. Dann sind beide Winkel α und β Komplementwinkel zu γ und sind gleich, weil sie beide $90^0 - \gamma$ betragen.

Sätze über symmetrische Figuren. § 6.

B (Fig. 10) sei ein beliebiger Punkt der Ebene. Derselbe möge durch das Umklappen um die Achse α in die Lage B' kommen. Der Punkt B' seinerseits wird durch das Umklappen nach B zurückgebracht*). B und B' sind also nach § 3b entsprechende Punkte. Die Verbindungslinie BB' schneidet die Achse in einem Punkte D. Durch das Umklappen deckt jede der Strecken DB und DB' die frühere Lage der andern. Also ist $DB = DB'$ und D ist die Mitte von BB'. Ferner deckt beim Umklappen jeder der Winkel α und α' die frühere Lage

(Fig. 11.) b sei eine beliebige Gerade, welche die Achse a in dem Punkte A schneidet. Diese Gerade werde durch das Umklappen nach b' gebracht. Dann zeigt man gerade wie vorhin, dafs b' durch das Umklappen nach b zurückgebracht wird, also b und b' nach § 3b entsprechende Gerade sind. Der Punkt A bleibt bei der Bewegung auf seiner Stelle, folglich mufs die neue Lage, welche b nach dem Umklappen hat, d. h. die Gerade b', auch durch A gehen. Aufserdem deckt durch das Umklappen jeder der Winkel α und α' die frühere Lage des andern, woraus

*) B' ist dem Punkte B um einen halben Umschwung voraus und mufs durch das Umklappen dahin geführt werden, wohin B erst nach einem ganzen Umschwunge gelangt, nämlich nach B zurück.

des andern. Diese Winkel müssen also gleich sein und, weil sie Nebenwinkel sind, ist jeder ein rechter Winkel.

a) Wenn zwei Punkte B und B' sich für eine Achse a entsprechen, so ist a die Mittelsenkrechte von BB'.

folgt, daſs a den Winkel der Richtungen b und b' halbiert.

α) Wenn zwei Richtungen b und b' sich für eine Achse a entsprechen, so ist a die Halbierungslinie des von b und b' gebildeten Winkels.

Fig. 10.

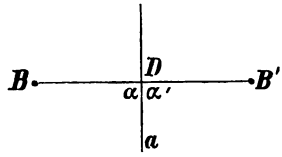
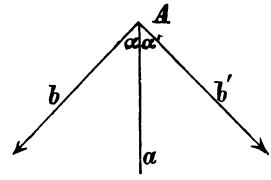


Fig. 11.



Umgekehrt:

b) Zwei Punkte B und B' entsprechen sich für die Mittelsenkrechte der Strecke BB'.

β) Zwei Richtungen entsprechen sich für die Halbierungslinie ihres Winkels.

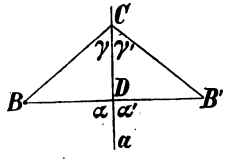
Das in β) Gesagte ist schon in § 3a enthalten und b) ist nur ein besonderer Fall von § 3a.

c) Strecken oder Winkel, welche einander symmetrisch entsprechen, sind gleich.

Dieselben werden durch das Umklappen um eine Achse oder durch die halbe Umdrehung zur Deckung gebracht.

d) Anwendungen. 1) In einem Punkte einer Geraden kann man nur eine Senkrechte errichten. 2) Von einem Punkte aufserhalb einer Geraden kann man nur eine Senkrechte auf die Gerade fällen.

Fig. 12.



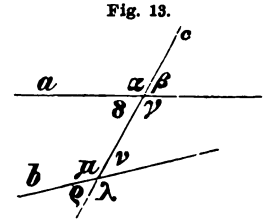
Beweis. 1) Ein gestreckter Winkel hat wie jeder andere Winkel nur eine Halbierungslinie, welche eben durch die im Scheitel errichtete Senkrechte dargestellt ist. 2) Wenn man den Punkt B mit dem entsprechenden B' verbindet, so hat man eine von B auf a gefällte Senkrechte BD erhalten (§ 6a). Wenn auch BC auf a senkrecht wäre, so müfste γ ein rechter Winkel sein. Da aber durch das Umklappen um a der Winkel

γ auf γ' fällt, so wäre auch γ' recht und die Punkte B, C, B' lägen auf einer Geraden. Dies ist nach § 1b unmöglich.

Winkelbezeichnungen. § 7.

Wenn zwei Gerade a und b (Fig. 13) von einer dritten c geschnitten werden, so entstehen 8 Winkel, vier innere (δ, γ, ν, μ) und vier äufsere (α, β, λ, ϱ). Die Winkel an verschiedenen Schnittpunkten werden auf folgende Arten paarweise zusammengefafst:

Fig. 13.



1) Zwei äufsere oder zwei innere Winkel auf verschiedenen Seiten der Schnittlinie heifsen Wechselwinkel.

2) Ein äufserer und ein innerer Winkel auf derselben Seite der Schnittlinie heifsen korrespondierende Winkel.

3) Zwei äufsere oder zwei innere Winkel auf derselben Seite der Schnittlinie heifsen Ergänzungswinkel.

Zwei Gerade, welche von einer dritten geschnitten werden. § 8.

a) Wenn innere Wechselwinkel gleich sind, so sind die geschnittenen Linien parallel. (Siehe § 4.)

b) Grundsatz. Wenn innere Wechselwinkel ungleich sind, so sind die geschnittenen Linien nicht parallel.

Die Anschauung zeigt, dafs sie sich auf der Seite schneiden, wo der kleinere Winkel liegt (Fig. 16).

c) Die geschnittenen Linien sind parallel

1) wenn zwei korrespondierende Winkel gleich sind;

2) wenn zwei Wechselwinkel gleich sind;

3) wenn zwei Ergänzungswinkel zusammen 180^0 betragen.

Fig. 14.

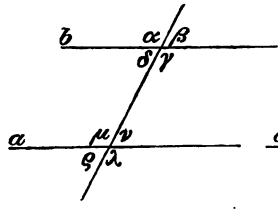
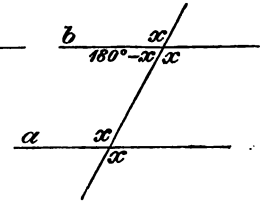


Fig. 15.



Beweis. 1) Wenn die korrespondierenden Winkel α und μ in Fig. 14 gleich sind, so bezeichne man beide mit x (Fig. 15). Dann ist auch $\gamma = x$ als Scheitelwinkel von α. Die innern

Wechselwinkel γ und μ sind also gleich (weil beide gleich x sind) und die geschnittenen Linien sind nach a) parallel.

2) Sind äufsere Wechselwinkel, z. B. α und λ in Fig. 14, einander gleich, so bezeichne man beide mit x (Fig. 15). Dann ist auch $\gamma = x$ als Scheitelwinkel von α und $\mu = x$ als Scheitelwinkel von λ u. s. w.

3) Sind 2 Ergänzungswinkel, z. B. δ und μ in Fig. 14, zusammen 180^0 und bezeichnet man den einen μ mit x (Fig. 15), so ist $\delta = 180^0 - x$. Dann ist auch $\gamma = x$ als Nebenwinkel von δ; die innern Wechselwinkel γ und μ sind also einander gleich (weil beide gleich x sind) u. s. w.

d) Wenn die geschnittenen Linien parallel sind, so sind

1) korrespondierende Winkel gleich;

2) Wechselwinkel sind gleich;

3) Ergänzungswinkel betragen zusammen 180^0.

Beweis. Wenn die Linien a und b in Fig. 14 parallel sind, so müssen die Winkel γ und μ gleich sein; denn wenn diese Winkel nicht gleich wären, so wären die Geraden a und b nicht parallel (Grundsatz b). Bezeichne die gleichen Winkel γ und μ mit x (Fig. 15). Dann ist auch $\alpha = x$ als Scheitelwinkel von γ; die korrespondierenden Winkel α und μ sind also gleich, weil beide gleich x sind. Ferner ist auch $\lambda = x$ als Scheitelwinkel von μ; folglich sind die äufseren Wechselwinkel α und λ gleich, weil beide gleich x sind. Ferner ist $\delta = 180^0 - x$ als Nebenwinkel von γ. Die Ergänzungswinkel μ und δ sind also zusammen 180^0, weil $x + 180^0 - x = 180^0$.

Fig. 16.

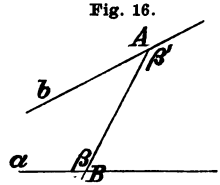
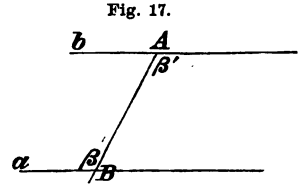


Fig. 17.



e) Durch einen Punkt A kann man nur eine Parallele zu einer Geraden a ziehen (Fig. 17).

Beweis. Denke durch A die Gerade AB gezogen, welche a schneidet und den Winkel β entstehen läfst. Ist b eine Parallele zu a, so mufs $\beta' = \beta$ sein; die Linie b kann daher nur eine Lage haben; sie ist der freie Schenkel des in A angetragenen Winkels $\beta' = \beta$.

§ 9. Fortsetzung.

a) Wenn die eine von zwei Parallelen durch eine dritte geschnitten wird, so wird es auch die andere.

Beweis. a und b (Fig. 18) seien parallel. c schneide a in M. Wenn c mit b parallel wäre, so gingen durch M zwei zu b parallele Gerade, was § 8e widerspricht.

Fig. 18.

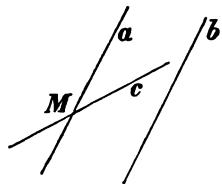


Fig. 19.

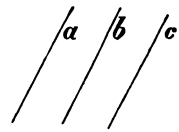
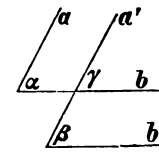


Fig. 20.



b) Wenn zwei Gerade mit einer dritten parallel sind, so sind sie unter sich parallel.

Beweis. b und c (Fig. 19) seien mit a parallel. Wenn b und c sich schnitten, so würden durch den Schnittpunkt M zwei zu a parallele Gerade b und c gehen, was § 8e widerspricht.

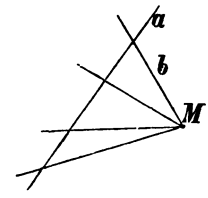
c) Winkel, deren Schenkel paarweise in gleicher Richtung parallel laufen, sind gleich.

Beweis. Die Winkel α und β (Fig. 20) sind gleich, weil sie beide dem Winkel γ gleich sind (§ 8d).

d) Parallele Gerade können als Linien angesehen werden, die einen unendlich fernen Punkt mit einander gemeinsam haben. Einer Geraden schreibt man nur einen unendlich fernen Punkt zu.

Wenn man die eine a (Fig. 21) von zwei konvergenten Geraden festhält und die andere b um einen ihrer Punkte M dreht, so tritt der Parallelismus erst ein, nachdem der Schnittpunkt von a und b nach der einen oder andern Seite in unendliche Ferne gerückt ist, und die letzteren beiden Lagen sind von der parallelen Lage unendlich wenig verschieden, womit der Sinn der ersten Behauptung ausgesprochen ist. Die nach den entgegengesetzten Richtungen der Geraden a liegenden unendlich fernen Punkte werden nur als ein Punkt betrachtet, weil sie mit M zusammen nur eine einzige Gerade, nämlich die Parallele bestimmen, oder um dies etwas anders auszudrücken, weil sonst die durch M gezogene Parallele mit a zwei Punkte gemein hätte, ohne mit a zusammenzufallen.

Fig. 21.



Anmerkung. Dafs man gerade im gewöhnlichen Leben Linien, die einen fernen Punkt gemein haben, als parallele

Linien oder Linien von gleicher Richtung ansieht, folgt daraus, dafs zwei Beobachter in gleicher Richtung zu schauen behaupten, wenn sie nach demselben sehr weit entfernten Punkte sehen.

II. Abschnitt.

Entstehung von Figuren und allgemeine Eigenschaften derselben.

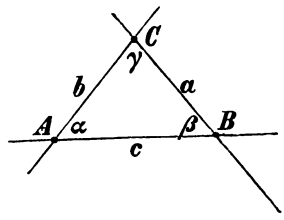
§ 10. Dreieck und Dreiseit.

a) Drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, und ihre Verbindungslinien grenzen einen ungeteilten Raum ab.

α) Drei Gerade, die nicht durch einen Punkt gehen, und ihre Schnittpunkte bestimmen die nämliche Figur, welche in a) betrachtet wurde.

Die in a) und α) entstandene Figur wird je nach ihrer Entstehungsweise Dreieck oder Dreiseit genannt (siehe Fig. 22). Ein Dreieck (Dreiseit) ist durch die Lage der Ecken (oder durch die Lage der Seiten) vollkommen bestimmt.

Fig. 22.

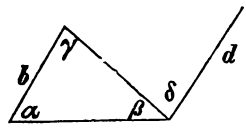


Anmerkung. Man sagt von Dreiecken, deren Ecken (und Seiten) sich entsprechen (z. B. von symmetrischen Dreiecken), sie seien „gleichen oder entgegengesetzten Sinnes", je nachdem dasselbe von den entsprechenden Winkeln gilt. (Vergleiche die Übungen § 2, 7 bis 12.)

§ 11. Allgemeine Sätze über das Dreieck.

a) Die Summe der Winkel eines Dreiecks beträgt 180^0.

Fig. 23.

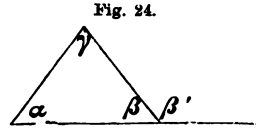


Beweis. (Fig. 23.) Man ziehe durch den Scheitel eines Winkels β die Parallele zur gegenüberliegenden Seite b. Die Winkel $(\beta + \delta)$ und α sind als Ergänzungswinkel nach § 8d zusammen 180^0. Ersetzt man in der Gleichung $\alpha + \beta + \delta = 180^0$ den Winkel δ durch den ihm gleichen Wechselwinkel γ (§ 8d), so erhält man $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.

b) Ein Aufsenwinkel ist gleich der Summe der beiden innern Winkel, welche nicht seine Nebenwinkel sind.

Beweis. β' in Fig. 24 ist gleich $180^0 - \beta$ (§ 5b), und die Summe $\alpha + \gamma$ ist nach § 11a auch $180^0 - \beta$. Also ist $\beta' = \alpha + \gamma$.

Fig. 24.



Ein Dreieck kann lauter spitze Winkel haben (spitzwinkliges D.), aber nur einen rechten (rechtwinkliges D.) oder stumpfen Winkel (stumpfwinkliges D.). Den rechtwinkligen Dreiecken stellt man auch die übrigen als schiefwinklige gegenüber.

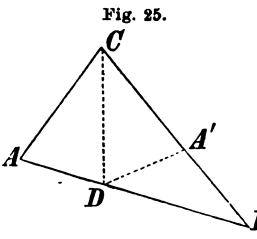
Fortsetzung. § 12.

a) In jedem Dreieck liegt der gröfseren Seite der gröfsere Winkel gegenüber.

α) In jedem Dreieck liegt dem gröfseren Winkel die gröfsere Seite gegenüber.

Beweise. (Fig. 25.) a) CB sei gröfser als CA. Man ziehe die Halbierungslinie des Winkels γ*) und klappe das Dreieck CDA um die Achse CD um. A fällt alsdann auf CB (§ 3a) und zwar zwischen C und B (Vorauss.) nach A'. Der Winkel α erscheint dann in seiner neuen Lage bei A' als Aufsenwinkel des Dreiecks DBA' und ist nach § 11b gröfser als Winkel β.

Fig. 25.



α) Der Winkel α*) sei gröfser als β. Man ziehe die Halbierungslinie CD von γ (Fig. 25). Alsdann ist $\sphericalangle BDC$ (er ist $\alpha + \frac{\gamma}{2}$ nach § 11b) gröfser als ADC (er ist $\beta + \frac{\gamma}{2}$). Bei dem Umklappen von Dreieck ACD um CD mufs daher DA in den Winkel CDB hineinfallen, so dafs die neue Lage von A notwendig zwischen C und B fällt. Hieraus folgt, dafs CA kleiner als CB ist.

Folgerungen. **b)** Gleichen Seiten (eines Dreiecks) liegen gleiche Winkel gegenüber.

β) Gleichen Winkeln (eines Dreiecks) liegen gleiche Seiten gegenüber.

Beweise. b) Wenn die Winkel ungleich wären, so müfsten auch nach Satz α) die Seiten ungleich sein.

β) Wenn die Seiten ungleich wären, so müfsten auch nach Satz a) die Winkel ungleich sein.

Anmerkung. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die-

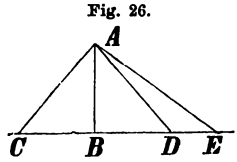
*) Die Bezeichnung von Stücken des Dreiecks siehe in Fig. 22.

jenige Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt (Hypotenuse) gröfser als die übrigen (Katheten). Entsprechendes gilt vom stumpfwinkligen Dreieck (Satz a).

c) 1) Unter allen Strecken, die man von einem Punkte nach einer Geraden ziehen kann, ist die Senkrechte die kürzeste (Entfernung des Punktes von der Geraden). 2) Zwei schiefe Strecken sind gleich, wenn ihre Endpunkte vom Fufspunkte der Senkrechten gleiche Entfernung haben. 3) Von zwei schiefen Strecken ist diejenige die gröfsere, deren Endpunkt von dem Fufspunkte der Senkrechten weiter absteht.

Beweis. (Fig. 26.) 1) Die schiefe Linie AC ist gröfser als die Senkrechte AB, weil sie im Dreieck ABC dem gröfsten Winkel gegenüber liegt. 2) Wenn die Punkte C und D von B gleichen Abstand haben, so entsprechen sie sich nach § 6b für die Achse AB symmetrisch. Dann sind aber auch die Strecken AC und AD entsprechend und deshalb gleich (§ 6c). 3) Wenn $BE > BD$, so ist der Winkel ADE als Aufsenwinkel des Dreiecks ABD gröfser als Winkel ABD, d. h. stumpf. Folglich ist $AE > AD$.

Fig. 26.



§ 13. Viereck und Vierseit.

a) Erklärungen. Vier Punkte, von welchen nie 3 auf einer Geraden liegen, bilden die Ecken eines „vollständigen Vierecks“, dessen Seiten

α) Erklärungen. Vier Gerade a, b, c, d, von welchen nie 3 durch einen Punkt gehen, bilden die Seites eines „vollständigen Vierseits“, dessen

Fig. 27.

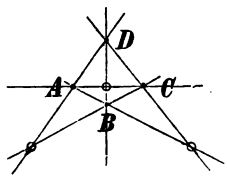


Fig. 28.

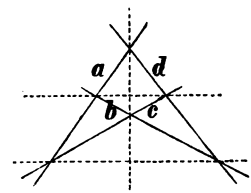


Fig. 29.

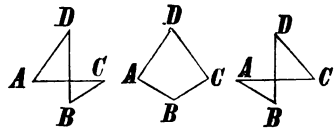
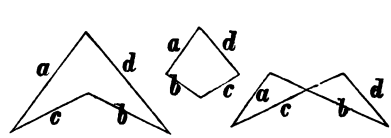


Fig. 30.



die 6 möglichen Verbindungslinien jener Punkte sind (Fig. 27).

Je zwei Seiten, welche sich nicht in einem Eckpunkte schneiden, wie AD und BC, heifsen Gegenseiten. Der Schnittpunkt zweier Gegenseiten heifst ein Nebeneck des vollständigen Vierecks.

Ein vollständiges Viereck hat 3 Paare von Gegenseiten und 3 Nebenecken.

Es giebt 3 Arten, von einem Eckpunkte A aus durch die Seiten des vollständigen Vierecks zu den übrigen Ecken und nach A zurück zu kommen.

Dadurch entstehen 3 „einfache Vierecke“ (Fig. 29). Seiten des mittlern unter ihnen werden die Strecken AB, BC, CD, DA genannt. Nur eines derselben schliefst einen ungeteilten Raum ab, in den die Träger der Viereckseiten nicht hineinreichen. Die Winkel dieses Vierecks sind hohl.

Ecken die 6 möglichen Schnittpunkte jener Geraden sind (Fig. 28).

Je zwei Ecken, welche nicht auf einer Seite liegen, wie (ab) und (cd), heifsen Gegenecken. Die Verbindungslinie zweier Gegenecken heifst eine Diagonale des vollständigen Vierseits.

Ein vollständiges Vierseit hat 3 Paare von Gegenecken und 3 Diagonalen.

Es giebt 3 Arten, von einer Seite a aus durch die Ecken des vollständigen Vierseits zu den übrigen Seiten und nach a zurück zu kommen.

Dadurch entstehen 3 „einfache Vierseite“ (Fig. 30). Eckpunkte des mittlern unter ihnen heifsen die 4 Schnittpunkte (ab), (bc), (cd), (da). Nur eines derselben schliefst einen ungeteilten Raum ein, in welchen die Seiten nicht hineinreichen. Die Winkel dieses Vierseits sind hohl.

Das einfache Viereck und das einfache Vierseit sind identische Figuren.

Einfache Vielecke. § 14.

a) Erklärungen. Wenn man einen beliebigen Punkt mit einem zweiten, diesen mit einem dritten und so fort, durch geradlinige Strecken verbindet und zuletzt wieder zu dem ersten Punkte zurückkehrt, so entsteht ein einfaches Vieleck.

Ein n-Eck hat n Winkel und n Seiten. Die Nebenwinkel der Vieleckswinkel heifsen Aufsenwinkel.

Die folgenden Sätze gelten nur für solche Vielecke, welche einen ungeteilten Raum abschliefsen, in den die Träger der

Seiten nicht hineinreichen. Solche Vielecke haben lauter hohle Winkel. Ein Zuschauer durchläuft den Umring des Vielecks rechts oder links herum, je nachdem er die Fläche des Vielecks rechter oder linker Hand hat. Denkt man hierbei jede Seite in derjenigen Richtung verlängert, in welcher sie durchlaufen wird, so erhält man n Aufsenwinkel, welche man kurz als „die Aufsenwinkel des n-Ecks" bezeichnet. — Durch einen Eckpunkt des Vielecks gehen $n - 1$ Strecken, welche denselben mit den übrigen Ecken verbinden. Zwei derselben sind Seiten des Vielecks, die übrigen $n - 3$ werden Diagonalen genannt. Durch diese Diagonalen wird das n-Eck in $n - 2$ Dreiecke geteilt.

b) Die Summe der Winkel eines n-Ecks beträgt

$$(n - 2) \cdot 180^0.$$

β) Die Summe der Aufsenwinkel eines n-Ecks beträgt 360^0.

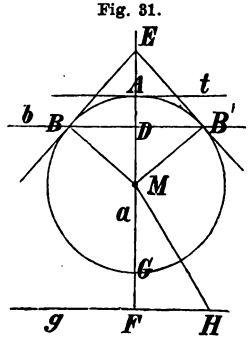
Beweise. b) Die Diagonalen eines Eckpunktes teilen das n-Eck in $(n - 2)$ Dreiecke. Die Winkel dieser Dreiecke bilden zusammen die n Winkel des n-Ecks und die Behauptung ergiebt sich deshalb aus § 11 a).

β) Die Aufsenwinkel müssen mit den innern Winkeln zusammen n mal 180^0 ausmachen. Man findet also die Summe der Aufsenwinkel, wenn man $(n - 2) \cdot 180^0$ von $n \cdot 180^0$ abzieht.

§ 15. Der Kreis. Lagen einer Geraden gegen denselben.

a) Erklärungen. Wenn eine Strecke r sich um einen Endpunkt M (Fig. 31) dreht, so beschreibt der andere Endpunkt B einen Kreis (Kreislinie), welcher die „Kreisfläche" einschliefst. Der Punkt M heifst Mittelpunkt des Kreises. Mit besonderen Benennungen werden noch belegt: Die Strecke, welche den Mittelpunkt M mit einem Kreispunkte verbindet (Radius $= r$), die Strecke, welche zwei Kreispunkte verbindet (Sehne), die gröfste Sehne im Kreis, nämlich die durch den Mittelpunkt gezogene (Durchmesser $= 2 \cdot r$), eine Gerade, welche den Kreis in 2 Punkten schneidet (Sekante) und daher der Träger einer Sehne ist, ein durch Punkte begrenztes Stück der Kreislinie (Bogen),

Fig. 31.



ein von zwei Radien eingeschlossener Winkel (Mittelpunktswinkel, Centriwinkel).

b) Eine Gerade b kann drei verschiedene Lagen gegen den Kreis haben:

1) Wenn die Entfernung der Geraden vom Mittelpunkte kleiner als der Radius ist, so trifft sie den Kreis in zwei Punkten B und B'.
2) Wenn die Entfernung der Geraden vom Mittelpunkte gleich dem Radius ist, so hat die Gerade einen einzigen Punkt mit dem Kreise gemein (Berührungspunkt) und heifst eine Tangente des Kreises.
3) Wenn die Entfernung der Geraden vom Mittelpunkte gröfser ist als der Radius, so trifft die Gerade den Kreis nicht.

Beweis. 1) Die Entfernung MD der Geraden b (Fig. 31) sei kleiner als der Radius. Ein Punkt P, welcher sich von D aus in der Richtung DB bewegt, entfernt sich fortwährend von M (§ 12c). Wenn seine Entfernung von D gleich dem Radius geworden ist, so ist sein Abstand von M gröfser als der Radius (§ 12, Anmerkung). Es mufs also schon vorher eine Lage des bewegten Punktes P gegeben haben (die Lage B), in welcher derselbe von M gerade um die Länge r (Radius) entfernt ist. — Ebenso beweist man, dafs auch auf der entgegengesetzten Richtung der Geraden b ein Schnittpunkt mit dem Kreise zu finden ist.

2) Die Entfernung MA der Geraden t (Fig. 31) sei gleich r. A liegt alsdann auf dem Kreise. Der Punkt P, welcher sich von A weg auf der Geraden t bewegt, entfernt sich von M und liegt daher jederzeit (die Anfangslage A ausgenommen) aufserhalb des Kreises. — Die Gerade t hat nur den Punkt A mit dem Kreise gemein.

3) Wenn man die Betrachtung 2) auf die Gerade g (Fig. 31) anwendet, deren Entfernung MF gröfser als r ist, so ergiebt die Behauptung in 3).

Folgerungen. Aus dem Satze b, 2 folgt:

c) Die im Endpunkte des Radius errichtete Senkrechte ist eine Tangente des Kreises.

Die Strecke MA in Fig. 31 hat die 3 Eigenschaften, dafs sie durch den Mittelpunkt des Kreises und durch den Berührungspunkt der Tangente t geht und auf dieser Tangente senkrecht steht. MA ist also sowohl die Verbindungslinie des Mittelpunktes mit dem Berührungspunkte, als auch die im Berührungs-

punkte auf die Tangente errichtete Senkrechte und die aus dem Mittelpunkte auf die Tangente gefällte Senkrechte. Daher die Sätze:

d) 1) Die im Berührungspunkt errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt.

2) Die aus dem Mittelpunkte gefällte Senkrechte geht durch den Berührungspunkt.

3) Die Gerade, welche den Mittelpunkt mit dem Berührungspunkte verbindet, steht auf der Tangente senkrecht.

§ 16. Symmetriesätze.

BB' sei eine Sehne des Kreises (Fig. 31) und AF der dazu senkrechte Durchmesser. Die halbe Umdrehung der Figur um AF bringt den Punkt B in die Verlängerung von BD über B hinaus und B ist auch in der neuen Lage (wie auch während der Bewegung) ein Kreispunkt. Daraus folgt, dafs B in den zweiten Endpunkt B' der Sehne BB' gelangt. Die Tangente BE in B kommt in die Lage $B'E$ und ist auch in der neuen Lage (wie auch während der Bewegung) Tangente des Kreises (in B'). Der Radius MB kommt nach MB' und ist wieder ein Radius des Kreises. Daraus folgt:

a) Der Kreis ist symmetrisch in Bezug auf jeden Durchmesser als Achse. Es entsprechen sich die Endpunkte jeder zum Durchmesser senkrechten Sehne, die Tangenten in diesen Endpunkten und die Radien nach diesen Endpunkten.

Die Achse enthält den Mittelpunkt und den Schnittpunkt der Tangenten; sie ist die Halbierungslinie des Tangentenwinkels und des Mittelpunktswinkels (§ 6), sowie die Mittelsenkrechte von BB'. Daher folgen die Sätze:

b) 1) Die Mittelsenkrechte der Sehne geht durch den Mittelpunkt etc.

2) Die Halbierungslinie des Tangentenwinkels geht durch den Mittelpunkt etc.

3) Die Halbierungslinie eines Mittelpunktswinkels steht auf der zugehörigen Sehne senkrecht und halbiert dieselbe.

4) Die Gerade, welche den Mittelpunkt mit dem Scheitel eines Tangentenwinkels verbindet, halbiert die zugehörige Berührungssehne senkrecht etc.

c) Die Tangentenabschnitte, welche von dem Schnittpunkte zweier Tangenten bis zum Kreise reichen, sind gleich grofs.

Anmerkung. Wenn die Gerade b (Fig. 31) sich parallel mit der anfänglichen Lage bewegt, bis sie mit t zusammenfällt, so fallen die Punkte B und B' beide nach A. — Die Tangente ist als eine Gerade anzusehen, welche den Kreis in 2 zusammenfallenden Punkten trifft.

Zwei Kreise. § 17.

a) Wenn die Mittelpunkte zweier Kreise zusammenfallen, so heifsen die Kreise koncentrisch.

Wenn solche Kreise auch gleiche Radien haben, so fallen sie zusammen; denn sie werden durch Drehung der nämlichen Strecke um denselben Punkt beschrieben.

b) Wenn die Mittelpunkte zweier Kreise nicht zusammenfallen, so heifst die Verbindungslinie dieser Mittelpunkte die Centrale der beiden Kreise. Wenn alsdann die Kreise einander treffen, so sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Die Kreise haben einen Punkt aufserhalb der Centralen gemeinsam. Alsdann haben sie noch einen zweiten Punkt gemeinsam und die Centrale ist die Mittelsenkrechte der gemeinsamen Sehne.

Fig. 32.

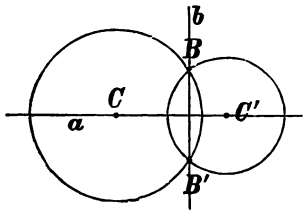
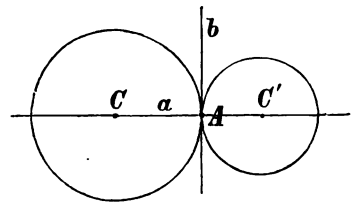


Fig. 33.



2) Wenn die Kreise einen Punkt der Centralen gemein haben, so haben sie in diesem Punkte eine gemeinsame Tangente, welche auf der Centralen senkrecht steht (Berührung von Kreisen).

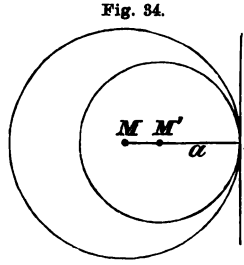
In beiden Fällen haben die Kreise keinen weitern Punkt gemein (ohne zusammenzufallen).

Beweis. 1) Nach § 16 deckt die Figur 32 nach dem Umklappen um die Achse a ihre frühere Lage. Dann ist aber der gemeinsame Punkt B beider Kreise nach dem für a entsprechenden Punkte B' gekommen.

2) Wenn die beiden Kreise den Punkt A (Fig. 33 oder 34) der Centralen gemeinsam haben, so ist A der gemeinsame Endpunkt zweier Radien und die in A auf der Centralen errichtete

Senkrechte ist zugleich Tangente beider Kreise. Der Punkt A entspricht sich nun selbst für die Centrale a.

Fig. 34.



Die Kreise können in beiden Fällen keinen weitern Punkt D gemeinsam haben; sonst müfsten die Mittelpunkte auch auf der Geraden g liegen, welche die gemeinsame Sehne BD oder AD senkrecht halbiert. Die Mittelpunkte der Kreise würden also beide in dem Schnittpunkte der Geraden a und g zusammenfallen, was der Voraussetzung in b) widerspricht.

c) Die möglichen Lagen zweier Kreise überhaupt sind die folgenden:

1) Die Kreise schliefsen einander aus (Taf. I, Fig. 15). — Die Centrale ist gröfser als die Summe der Radien (um das Stück AB).
2) Die Kreise berühren einander von aufsen (Fig. 33). — Die Centrale ist gleich der Summe der Radien.
3) Der gröfsere Kreis schliefst den kleineren ein (Taf. I, Fig. 14). Die Centrale ist kleiner als die Differenz der Radien (um das Stück AB).
4) Die Kreise berühren einander von innen (Fig. 34). — Die Centrale ist gleich der Differenz der Radien.
5) Die Kreise schneiden einander. — Dieser Fall entsteht, wenn in Fig. 33 die Centrale kleiner oder wenn sie in Fig. 34 gröfser wird. — Die Centrale ist also kleiner als die Summe der Radien, aber doch noch gröfser als ihre Differenz.

§ 18. Begriff und Anwendung der geometrischen Örter.

a) Alle Punkte der Ebene, welche einer Bedingung genügen, bilden eine Figur, welche ein geometrischer Ort genannt wird.

Beispiel. Alle Punkte der Ebene, welche von dem Punkte M die Entfernung r haben, sind Endpunkte einer Strecke von der Länge r, deren Anfangspunkt der Punkt M ist. Durch die Drehung dieser Strecke um M entsteht nach § 15a ein Kreis:

b) Der geometrische Ort für diejenigen Punkte, welche von M den Abstand r haben, ist der Kreis, welcher mit dem Radius r um M gezogen ist.

Die Angabe dieses Ortes ist vollständig; denn aufser den Punkten jenes Kreises giebt es keine andern Punkte der Ebene, welche von M die Entfernung r hätten, oder:

1) Alle Punkte, welche von M die Entfernung r haben, liegen auf dem Kreise.

In der Angabe des Ortes sind auch keine überflüssigen Linien oder Linienteile genannt; denn:

2) Alle Punkte des Kreises haben von M die Entfernung r.

In diesen beiden Behauptungen besteht der Inhalt des in b) ausgesprochenen Ortssatzes. Diese Behauptungen müssen im allgemeinen bewiesen werden (siehe § 20). In § 18b sind diese Beweise in der Beschreibung des Ortes durch die Bewegung einer Strecke enthalten.

Wenn aufgegeben ist, über einer Strecke $AB = c$ als Seite ein Dreieck zu zeichnen, von welchem der Winkel α*) gegeben ist, so mufs 1) der Eckpunkt C auf dem freien Schenkel des in A angetragenen Winkels α liegen. 2) Es kann alsdann jeder Punkt dieses freien Schenkels als Spitze des Dreiecks angenommeu werden. Nach dem Vorigen kann man sagen:

Ein Ort für C ist der freie Schenkel des in A angetragenen Winkels α.

Ist nun als drittes Stück des Dreiecks z. B. die Seite a gegeben, so folgt auch aus dem Vorhergehenden:

Ein zweiter Ort für C ist der mit a um B beschriebene Kreis.

Die Spitze C mufs alsdann auf beiden Örtern zugleich liegen. Es giebt so viele Lagen für C und daher so viele Dreiecke, als gemeinsame Punkte beider Örter bestehen.

c) Ein Punkt, der zwei Bedingungen zugleich genügt, wird durch zwei geometrische Örter gefunden. Es giebt so viele Lagen für diesen Punkt (so viele Lösungen der Aufgabe), als gemeinsame Punkte beider Orter bestehen.

d) Wenn über einer Strecke $AB = c$ mit noch 2 gegebenen Stücken nur ein einziges Dreieck möglich ist, so müssen 2 Dreiecke, welche mit diesen 3 Stücken an verschiedenen Orten gezeichnet werden, zusammenfallen, sobald sie über dieselbe Gerade $AB = c$ gestellt werden.

Wäre dieses nicht der Fall, so gäbe es über AB 2 Dreiecke, welche der Aufgabe genügen, was der Annahme widerspricht.

---

*) Der Bezeichnung in Fig. 22 zufolge soll der Winkel α des Dreiecks den Punkt A zum Scheitel haben.

e) Dreiecke heifsen kongruent, wenn sie so gelegt werden können, dafs sie einander decken.

f) In kongruenten Dreiecken sind entsprechende Seiten und Winkel gleich.

Entsprechende Stücke nennt man nämlich diejenigen, welche bei der Deckung der Dreiecke auf einander fallen. Diejenigen Winkel (Seiten), welche entsprechenden Seiten (Winkeln) gegenüberliegen, sind ebenfalls entsprechend.

§ 19. **Die 4 Fundamentalkonstruktionen des Dreiecks. — Die 4 Kongruenzsätze.**

a) Über der Seite $AB = c$ ein Dreieck zu konstruieren, wenn noch die beiden andern Seiten a und b gegeben sind.

Analyse. Man hat für den Punkt C zwei Örter: den Kreis, der mit a um B beschrieben ist und denjenigen, welcher mit b um A beschrieben ist. Die Kreise können über AB höchstens einen Punkt gemeinsam haben — man erhält jedenfalls nicht mehr als ein Dreieck, welches der Aufgabe genügt. Die Konstruktion ist leicht auszusprechen. Determination: Nur wenn die Bedingungen $c < a + b$ und $c > a - b$ erfüllt sind (§ 17c), erhält man 2 Schnittpunkte der Kreise, von welchen der eine über AC gelegene für C gewählt werden darf. Wenn $c = a + b$ oder $c = a - b$, so fällt C auf die Gerade AB (Grenzfälle), so dafs kein Dreieck entsteht. Wenn $c > a + b$ oder $c < a - b$, so treffen die Kreise einander gar nicht und man erhält ebenfalls kein Dreieck.

Folgerungen: 1) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie die 3 Seiten entsprechend gleich haben.

2) In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten gröfser als die dritte und die Differenz zweier Seiten ist kleiner als die dritte.

b) Aufgabe. In dem Punkte M den gegebenen Winkel ABC an die Gerade MN anzutragen (Fig. 16 u. 17 auf Taf. I).

Beschreibe mit gleichen Radien um Scheitel B des gegebenen Winkels und den gegebenen Punkt M Kreisbogen. Mache $PQ = FG$, so folgt aus der Kongruenz der Dreiecke FBG und PMQ (nach § 18f), dafs $\sphericalangle ABC = PMN$.

c) Über der Seite $AB = c$ ein Dreieck zu konstruieren, wenn noch die Seite b und der eingeschlossene Winkel α gegeben sind.

Analyse. Man hat für C zwei Örter, nämlich den freien

Schenkel des in A angetragenen Winkels α und den mit b um A beschriebenen Kreis. Da beide nur einen Punkt gemein haben können, so giebt es höchstens ein Dreieck, welches der Aufgabe genügt. Die Konstruktion ist mit Hilfe von b) auszuführen. Determination: Wenn $\alpha < 180^0$, so giebt es immer eine einzige Lösung.

Folgerung. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel entsprechend gleich haben.

d) Über der Seite $AB \doteq c$ ein Dreieck zu konstruieren, wenn noch die Seite a und der ihr gegenüberliegende Winkel α gegeben sind.

Analyse. Man hat als Örter für den Punkt C den freien Schenkel des in A angetragenen Winkels α und den mit a um B beschriebenen Kreis. Beide Örter können höchstens 2 Punkte gemeinsam haben, so dafs es höchstens 2 Lösungen giebt. Die Konstruktion ist leicht anzugeben. Determination: Der Kreis trifft den Träger des freien Schenkels in keinem Punkte oder in einem Punkte oder in 2 Punkten, je nachdem der Radius a kleiner, gleich oder gröfser ist, als die Entfernung des freien Schenkels von α vom Punkte B. Von den zwei Punkten, welche im dritten Falle in Betracht kommen, liegt aber nur einer auf dem freien Schenkel von α (der andere auf dem Schenkel seines Nebenwinkels), sobald $a > c$ (Taf. I, Fig. 19). In diesem Falle erhält man nur eine Lösung.

Folgerung. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie 2 Seiten und den der gröfseren gegenüberliegenden Winkel entsprechend gleich haben.

e) Über der Seite $AB = c$ ein Dreieck zu konstruieren, wenn noch 2 Winkel gegeben sind.

Wenn 2 Winkel gegeben sind, so kann man den dritten Winkel durch § 11a finden. Man darf also annehmen, dafs die beiden anliegenden Winkel α und β bekannt seien. Nun hat man als Örter für C die freien Schenkel der in A und B angetragenen Winkel α und β. Dieselben haben nur einen Punkt gemeinsam, so dafs man nur eine Lösung erhält.

Folgerung. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie eine Seite und 2 Winkel entsprechend gleich haben.

Geometrische Örter. § 20.

a) Der geometrische Ort für diejenigen Punkte, welche von

α) Der geometrische Ort für diejenigen Punkte, welche

2 festen Punkten gleiche Entfernung haben (für die Mittelpunkte der Kreise, welche durch diese Punkte gehen), ist die Mittelsenkrechte der Verbindungslinie.

von den Schenkeln eines Winkels gleiche Entfernung haben (für die Mittelpunkte der Kreise, welche die Schenkel des Winkels berühren), ist die Halbierungslinie des Winkels.

Fig. 35.

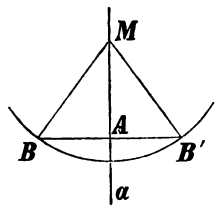
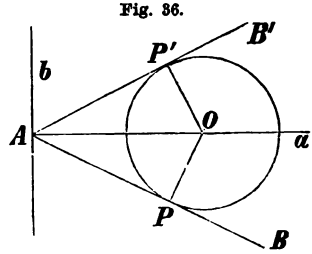


Fig. 36.



Beweis zu a. (Fig. 35.) 1) Wenn $MB = MB'$, oder wenn M der Mittelpunkt eines Kreises ist, der durch B und B' geht, so mufs auch die Mittelsenkrechte der Sehne BB' durch M gehen (§ 16).

2) Wenn M auf der Mittelsenkrechten a von BB' gelegen ist, so entsprechen sich die Strecken MB und MB' für die Achse a. Folglich ist $MB = MB'$ und man kann mit dem Radius $MB = MB'$ einen Kreis um M ziehen, der durch B und B' geht.

Beweis zu β. (Fig. 36.) 1) Wenn die senkrechten Entfernungen OP und OP' gleich sind, oder wenn O der Mittelpunkt eines Kreises ist, der die Winkelschenkel in P und P' berührt, so mufs die Halbierungslinie a des Tangentenwinkels BAB' durch O gehen (§ 16).

2) Wenn O auf der Halbierungslinie des Winkels BAB' gelegen ist und die Winkel bei P und P' recht sind, so haben die Dreiecke OAP und OAP' alle Winkel entsprechend gleich. Dann entsprechen sich die Geraden AP und AP', OP und OP' für die Achse a (§ 6). Folglich sind auch die Schnittpunkte P und P', sowie die Strecken OP und OP' entsprechend und man hat nach § 6c $OP = OP'$. O ist dann der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius $OP = OP'$, der die Schenkel in P und P' berührt.

b) Fragt man nach den Punkten, welche von zwei konvergenten Geraden gleiche Entfernung haben*), oder nach

*) Die Senkrechten brauchen alsdann nicht auf den Schenkeln eines bestimmten unter den 4 gebildeten Winkeln aufzutreffen.

den Mittelpunkten von Kreisen, welche diese Geraden berühren, so besteht der geometrische Ort derselben aus zwei zu einander senkrechten Geraden, in welche die Halbierungslinien der 4 gebildeten Winkel fallen.

c) Wenn in Fig. 35 die Punkte B und B' nach dem Punkte A zusammenfallen, oder wenn in Fig. 36 die Geraden AB und AB' beide in die auf a senkrechte Gerade b zusammenfallen, so erhält man den geometrischen Ort der Mittelpunkte von Kreisen, welche die Gerade b in A berühren. Dieser Ort ist die in A errichtete Senkrechte a. (Vergleiche § 15 d.)

Fortsetzung. § 21.

a) Es giebt nur einen Punkt, welcher von den Ecken eines Dreiecks ABC gleiche Entfernung hat oder der Mittelpunkt eines Kreises ist, welcher durch die Punkte A, B, C geht. In diesem Punkte schneiden sich die Mittelsenkrechten aller Dreiecksseiten.

α) Es giebt nur einen Punkt (im Innern eines Dreiecks), welcher von den Seiten gleiche Entfernung hat oder Mittelpunkt eines Kreises ist, der die 3 Seiten berührt. In diesem Punkte schneiden sich die Halbierungslinien der drei Winkel.

Beweis zu a). (Fig. 37.) Man ziehe die Mittelsenkrechten m' und m'' der Seiten a und b, welche sich in M schneiden. Weil

Fig. 37.

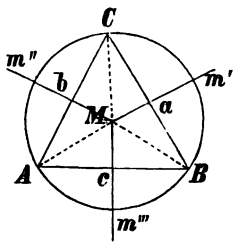
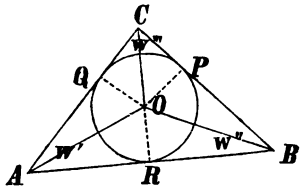


Fig. 38.



M auf der Mittelsenkrechten m' liegt, ist $MB = MC$; weil M auch auf m'' liegt, ist $MC = MA$ (§ 20a). Daraus ergiebt sich, dafs $MA = MB = MC$, oder dafs M von den Ecken gleiche Entfernung hat und Mittelpunkt eines Kreises ist, der durch A, B, C geht. Auch die Mittelsenkrechte von c mufs nach § 20a oder § 10b durch den Punkt M gehen. Ein zweiter Punkt derart ist unmöglich, denn auch er müfste auf den Mittelsenk-

rechten m' und m'' (auch m''') liegen und mit dem Schnittpunkte zusammenfallen.

Beweis zu α. (Fig. 38.) Man ziehe die Halbierungslinien w' und w'' der Winkel α und β. Dieselben schneiden sich in O. Weil O auf w' liegt, so ist $OQ = OR$; weil O auf w'' liegt, so ist $OR = OP$ (§ 20α). Daraus ergiebt sich, dafs $OP = OQ = OR$ oder dafs O der Mittelpunkt eines Kreises ist, welcher die 3 Seiten berührt. Auch die Halbierungslinie w''' des dritten Winkels mufs nach § 20α oder § 16b durch den Punkt O gehen. Ein zweiter Punkt derart ist unmöglich, denn auch er müfste nach § 20α auf w' und w'' liegen und mit dem Schnittpunkte O zusammenfallen.

b) Fragt man nach den Punkten, welche von den Trägern der Seiten gleiche Entfernung haben*), oder nach den Mittelpunkten von Kreisen, welche die Träger der Seiten berühren, so ergeben sich 4 Punkte. Einer derselben liegt im Innern des Dreiecks und ist der Schnittpunkt der Geraden, welche die Innenwinkel halbieren. Die drei übrigen Punkte liegen in den Feldern, welche den Dreiecksseiten anliegen, und in jedem derselben schneidet sich die Halbierungslinie eines Innenwinkels mit den Halbierungslinien der Aufsenwinkel an den übrigen Ecken.

Fig. 39.

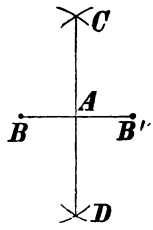


Fig. 40.

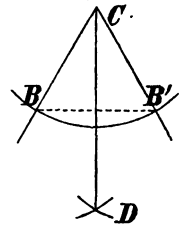


Fig. 41.

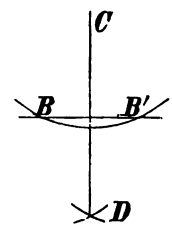
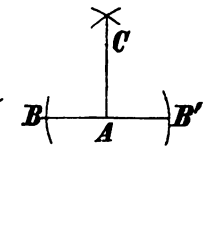


Fig. 42.



§ 22. Aufgaben.

a) Die Mittelsenkrechte einer Strecke zu konstruieren.

Auflösung. Man ziehe um die Endpunkte B und B' der Strecke (Fig. 39) als Mittelpunkte Kreise von gleichem Radius, welche sich schneiden. Die Schnittpunkte C und D liegen auf der gesuchten Senkrechten und bestimmen dieselbe.

Beweis. Die Schnittpunkte C und D liegen auf der Mittelsenkrechten von BB', weil sie von B und B' gleiche Entfernung (den Radius der Kreise) haben (§ 20a).

*) Die Senkrechten brauchen alsdann nicht die Seiten selbst, sondern nur ihre Träger zu treffen.

α) Die Halbierungslinie eines Winkels zu konstruieren.

Auflösung. Um den Winkel BCB' (Fig. 40) zu halbieren, ziehe man mit beliebigem Radius um C einen Kreisbogen BB'. Mit dem gleichen Radius ziehe man um B und B' Kreise, welche sich in C und einem Punkte D der gesuchten Halbierungslinie schneiden.

Beweis. Nach a) ist CD die Mittelsenkrechte der Strecke BB'. Die Geraden CB und CB' entsprechen sich also symmetrisch für die Achse CD, und CD halbiert deshalb den Winkel BCB'.

b) Von einem gegebenen Punkte aufserhalb einer Geraden die Senkrechte auf dieselbe zu fällen.

Auflösung. Man ziehe um den gegebenen Punkt C (Fig. 41) einen Kreis, welcher die Gerade in B und B' schneidet. Mit dem nämlichen Radius ziehe man um B und B' zwei Kreise, welche sich in C und einem zweiten Punkte D der gesuchten Senkrechten schneiden.

Beweis. Nach a) ist CD die Mittelsenkrechte von BB'; da dieselbe durch C geht, so ist die Aufgabe gelöst.

β) In einem gegebenen Punkte innerhalb einer Geraden eine Senkrechte auf dieselbe zu errichten.

Auflösung. Ist A (Fig. 42) der gegebene Punkt, so schneide man mit dem Zirkel auf beiden Seiten gleiche Stücke AB und AB' ab. Mit einem Radius, welcher gröfser ist als AB, ziehe man um B und B' Kreise. Ihre Schnittpunkte liegen auf der gesuchten Senkrechten.

Beweis. Die Schnittpunkte liegen auf der Mittelsenkrechten von BB'. Da diese durch A geht, so ist die Aufgabe gelöst. Man kann übrigens durch die Kenntnis von A den einen Schnittpunkt der Kreise sparen.

Winkel und Bogen. § 23.

a) Wenn man der Kreislinie eine beliebige Drehung um den Mittelpunkt giebt, so deckt sie ihre frühere Lage.

Beweis. Der Kreispunkt bleibt bei dieser Drehung Endpunkt einer Strecke, die sich um den Anfangspunkt dreht.

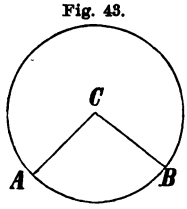
b) Folgerung. Man kann daher Bogen desselben Kreises auf einander abtragen wie geradlinige Strecken. Man kann die Summe oder Differenz von zwei Bogen bilden, zusehen, ob sie gleich sind (Deckung) oder ob der eine gröfser ist als der andere.

c) Zu gleichen Bogen gehören gleiche Mittelpunktswinkel und umgekehrt.

Beweis. 1) Man drehe den einen Bogen (Mittelpunktswinkel) um den Mittelpunkt, bis er den andern deckt. Dann decken sich auch die zugehörigen Mittelpunktswinkel (Bogen).

d) Ein Bogen, welcher 360mal in der Kreislinie enthalten ist, heifst (Bogen-) Grad (°). Ein Grad wird in 60 (Bogen-) Minuten (′) und diese in 60 (Bogen-)Sekunden (″) geteilt.

Fig. 43.



e) Folgerung. Ein Bogen hat ebensoviele Bogengrade, als der zugehörige Mittelpunktswinkel Winkelgrade enthält.

Wenn man mit ACB (Fig. 43) die Mafszahl (§ 56) des Winkels ACB und mit $\overset{\frown}{AB}$ die Mafszahl des Bogens AB, beide in Graden ausgedrückt, bezeichnet, so kann man setzen

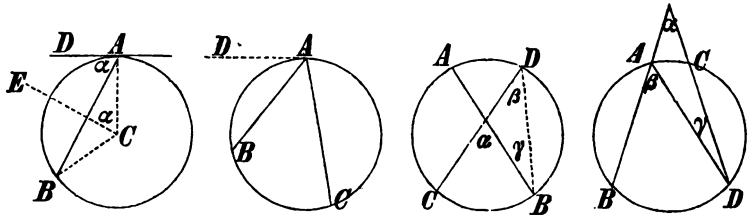
$$\sphericalangle ACB = \overset{\frown}{AB}.$$

§ 24. Peripheriewinkel, Sehnen- und Sekantenwinkel.

a) Erklärungen. Unter den Winkeln, deren Schenkel einen Kreis treffen, unterscheidet man:

1) Winkel, deren Scheitel auf dem Kreise liegen (Peripheriewinkel).
2) Winkel, deren Scheitel im Innern der Kreisfläche liegen (Sehnenwinkel mit dem besondern Fall der Mittelpunktswinkel).
3) Winkel, deren Scheitel aufserhalb der Kreisfläche liegen (Sekantenwinkel mit dem besondern Fall der Tangentenwinkel).

Fig. 44. Fig. 45. Fig. 46. Fig. 47.



b) Der Peripheriewinkel hat halb so viel Grade, als der eingeschlossene Kreisbogen.

Beweis. 1) Der Peripheriewinkel ist von einer Tangente (AD in Fig. 44) und einer Sehne AB gebildet. Man ziehe die Halbierungslinie CE des Mittelpunktswinkels ACB, welche nach

§ 16a, 3 auf der Sehne AB senkrecht steht. Alsdann sind die Winkel, welche mit α bezeichnet sind, einander gleich, weil ihre Schenkel paarweise senkrecht auf einander stehen (§ 5e). Man liest nun nach § 23e ab: $\alpha = \overset{\frown}{AE} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ (§ 23e), worin der Beweis liegt.

2) Der Peripheriewinkel ist von zwei Sehnen AB und AC gebildet (Fig. 45). Der Winkel BAC erscheint als Differenz der Sehnentangentenwinkel DAC und DAB. Nun hat man nach 1): $\sphericalangle DAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ und $\sphericalangle DAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$. Durch Subtraktion ergiebt sich: $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$.

c) Der Sehnenwinkel hat halb so viel Grade, als die Summe der Bogen, die von ihm und seinem Scheitelwinkel eingeschlossen sind.

Beweis. (Fig. 46.) $\alpha = \beta + \gamma$ (§ 11b). Wenn man hier $\beta = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CB}$ und $\gamma = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ einsetzt, so ergiebt sich die Behauptung.

d) Der Sekantenwinkel hat halb so viel Grade, als die Differenz der Bogen, die von seinen Schenkeln eingeschlossen sind.

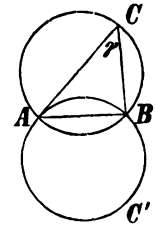
Beweis. (Fig. 47.) $\beta = \alpha + \gamma$ (§ 11b), oder $\alpha = \beta - \gamma$. Wenn man hier $\beta = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ und $\gamma = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ einsetzt, so ergiebt sich die Behauptung.

Geometrischer Ort. — Aufgaben. § 25.

a) Der geometrische Ort für die Spitzen aller Winkel von gegebener Gröfse, deren Schenkel durch A und B gehen, besteht aus zwei Kreisbogen, die ebenfalls durch diese Punkte gehen und sich für die Linie AB symmetrisch entsprechen.

Beweis. γ sei der gegebene Winkel (Fig. 48). So lange C sich auf dem Bogen ACB bewegt, bleibt der Winkel ACB von derselben Gröfse (§ 24b). Wenn aber C aus der Kreislinie heraustritt, so wird Winkel ACB gröfser oder kleiner, weil er als Sehnenwinkel oder Sekantenwinkel halb so grofs ist, als die Summe oder Differenz zweier Bogen, deren einer immer der Bogen AB sein wird. Durch Umklappen um die Achse AB erhält man den andern Teil des geometrischen Ortes, den Bogen $AC'B$.

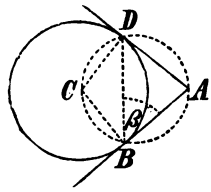
Fig. 48.



b) Wird der Winkel γ recht, so stellt der Bogen ACB

einen Halbkreis vor und die beiden zu AB symmetrischen Bogen machen einen ganzen Kreis aus (Ort für die Spitzen der rechtwinkligen Dreiecke mit der Hypotenuse AB).

Fig. 49.



c) Aufgabe. Von einem Punkte A (Fig. 49) aufserhalb eines Kreises Tangenten an den Kreis zu ziehen.

Auflösung. Die Berührungspunkte sind die Durchschnittspunkte des gegebenen Kreises mit einem andern, der über AC als Durchmesser errichtet ist.

d) Aufgabe. Einen Kreis zu zeichnen, welcher über einer Sehne (BD Fig. 49) einen gegebenen Winkel β als Peripheriewinkel faſst.

Auflösung. Trage den Winkel β an den einen Endpunkt B der Sehne an und konstruiere einen Kreis, welcher durch B und D geht und den Schenkel BA in B berührt. Um den Mittelpunkt dieses Kreises zu finden, hat man die in B auf die Tangente BA errichtete Senkrechte mit der Mittelsenkrechten von BD in C zu schneiden (§ 15d, 1 und 16b, 1).

III. Abschnitt.

Die besonderen Vielecke.

§ 26. Das gleichschenklige Dreieck.

b) Ein Dreieck, welches zwei gleiche Seiten hat (gleichschenkliges Dreieck) ist symmetrisch für eine Achse, mit welcher folgende Transversalen zusammenfallen:

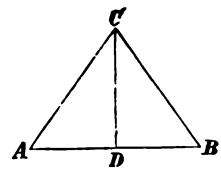
1) Die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze*).
2) Die Mittelsenkrechte der Grundlinie**).
3) Die durch die Spitze gezogene Höhe.
4) Die durch die Spitze gezogene Mittellinie.

Beweis. CD (Fig. 50) sei die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze. Nach § 3a entsprechen sich die Schenkel CA und CB für die Achse CD. Ebenso entsprechen sich nach § 3a die Punkte A und B, welche von C gleichen Abstand haben, für die Achse CD. Nun ist 1) CD als die Halbierungs-

*) Spitze nennt man den gemeinsamen Punkt der gleichen Seiten.
**) Grundlinie heifst die der Spitze gegenüberliegende Seite.

linie des Winkels ACB gezogen; 2) ist CD nach § 6a die Mittelsenkrechte von AB; 3) ist CD die durch C gezogene Höhe, weil (nach 2) die Winkel bei D recht sind; 4) ist CD die durch die Spitze gezogene Mittellinie, weil (nach 2) D die Mitte von AB ist.

Fig. 50.



Anmerkung. Die Dreiecke ADC und BDC entsprechen sich symmetrisch für die Achse CD, weil ihre Eckpunkte paarweise entsprechend sind (C und D entsprechen sich selbst). Die Dreiecke verwechseln ihre Lage durch das Umklappen.

b) Wenn die 4 Transversalen zusammenfallen, so kommen einer jeden die Eigenschaften der übrigen zu:

1) Die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze halbiert die Grundlinie senkrecht.
2) Die Mittelsenkrechte der Grundlinie geht durch die Spitze und halbiert den Winkel daselbst.
3) Die aus der Spitze auf die Grundlinie gefällte Senkrechte halbiert die Grundlinie und den Winkel an der Spitze.
4) Die von der Spitze nach der Mitte der Grundlinie gezogene Gerade halbiert den Winkel an der Spitze und steht senkrecht auf der Grundlinie.

Das symmetrische Vierseit (Deltoïd). § 27.

a) Wenn ein Viereck zwei Paare gleicher Nachbarseiten hat (Deltoïd)*), so ist es symmetrisch für eine Achse, mit welcher folgende Linien zusammenfallen:

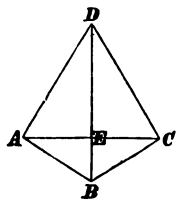
1) Die Halbierungslinien der Winkel, welche von gleichen Seiten eingeschlossen sind.
2) Die Diagonale, welche die Scheitel dieser Winkel verbindet (Längendiagonale).
3) Die Mittelsenkrechte der zweiten Diagonale (Querdiagonale).

Beweis. Die Querdiagonale AC, Fig. 51, bildet mit den Seiten des Deltoïds zwei gleichschenklige Dreiecke, deren gemeinsame Grundlinie sie ist. Die Mittelsenkrechte von AC geht also durch die Spitzen B und D dieser Dreiecke (§ 26b, 2). Für diese Achse BD entsprechen die Ecken B und D sich selbst, während A und C einander zugeordnet sind (§ 6b).

*) Deltoïde mit erhabenen Winkeln sind nicht ausgeschlossen.

Daher entsprechen sich auch die Seiten DA und DC, BA und BC. 1) Die Symmetrieachse fällt nach § 6 α mit den Halbierungslinien der Winkel bei B und D zusammen. 2) Die Achse geht nach dem vorher Gesagten durch B und D, stellt also die Längendiagonale vor, und ist 3) ebenfalls nach dem Vorigen die Mittelsenkrechte von AC.

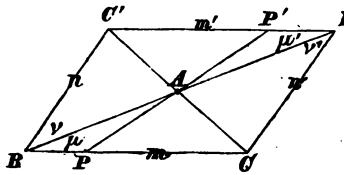
Fig. 51.



Anmerkung. Die Dreiecke ABD und CBD entsprechen sich, weil die Ecken A, B, D des ersten den Ecken C, B, D des zweiten entsprechen.

§ 28. Konstruktion von Vierecken.

Fig. 52.



a) BC und BC' seien zwei Seiten eines Vierecks (CC' eine Diagonale desselben). Man soll das Viereck konstruieren, wenn nacheinander folgende Bedingungen gegeben sind:

1) Je zwei gegenüberliegende Seiten sollen parallel sein. $BC \parallel C'B'$, $BC' \parallel CB'$.
2) Je zwei gegenüberliegende Seiten sollen gleich sein. $m = m'$, $n = n'$.
3) Je zwei gegenüberliegende Winkel sollen gleich sein. $\sphericalangle CBC' = CB'C'$, $\sphericalangle BCB' = BC'B'$.
4) Zwei gegenüberliegende Seiten sollen gleich und parallel sein. $BC \parallel B'C'$ und $m = m'$.
5) Die Diagonalen sollen einander halbieren. $BA = AB'$, $CA = AC'$.

Auflösungen:

1) Ziehe durch C' die Parallele zu BC und durch C die Parallele zu BC'. Man erhält nur eine einzige Lage für den vierten Eckpunkt und dadurch nur ein einziges Viereck.
2) Ziehe um C' einen Kreis mit m' und um C einen Kreis mit n'. Die Kreise haben zwar zwei gemeinsame Punkte; aber man darf von denselben nur denjenigen wählen, welcher nicht mit B auf derselben Seite von CC' liegt. Man erhält also ebenfalls nur ein einziges Viereck.
3) Wenn je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich sind, so betragen zwei an derselben Seite anliegende Winkel die Hälfte der Summe aller vier Winkel oder 180^0. Dadurch

kann man aus dem Winkel bei B die Winkel bei C und C' finden. Durch Antragen derselben erhält man zwei Örter für B' und dadurch eine einzige Lage für diesen vierten Eckpunkt. — Man erhält nur ein Viereck.

4) Ziehe durch C' die Parallele zu BC und trage auf ihr die Länge m ab. — Man erhält nur ein Viereck.

5) Die Mitte A von CC' muſs auch die Mitte der zweiten Diagonale sein. Der vierte Eckpunkt B' liegt also auf der Verlängerung von BA so, daſs $AB' = AB$. Man erhält nur ein Viereck.

b) Erklärung. Ein Viereck, in welchem je 2 gegenüberliegende Seiten parallel sind (vergleiche die erste Konstruktion) heiſst ein Parallelogramm.

c) Folgerung aus 1): Zwei Parallelogramme sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Sätze über das Parallelogramm. § 29.

Man gebe dem fünften der in § 28 konstruierten Vierecke eine halbe Umdrehung um den Punkt A. Jeder Eckpunkt vertauscht dadurch seine Lage mit dem gegenüberliegenden. Dadurch vertauscht auch jede Seite ihre Lage mit der gegenüberliegenden Seite:

Die gegenüberliegenden Seiten sind einander gleich.

Jede der Diagonalen deckt aber auch ihre eigene frühere Lage, sodaſs die Wechselwinkel μ und μ' sowie ν und ν' ihre Lagen vertauschen. Diese Wechselwinkel μ und μ' sowie ν und ν' sind gleich und:

Die gegenüberliegenden Seiten sind parallel.

Ferner folgt aus dem Bisherigen:

Die Seiten BC und $B'C'$ sind gleich und parallel.

Da die gegenüberliegenden Seiten ihre Lage vertauschen, so vertauschen auch die Viereckswinkel bei B und B' sowie diejenigen bei C und C' ihre Lage:

Die gegenüberliegenden Winkel sind gleich.

Das fünfte Viereck erfüllt also die Bedingungen, welche für die Konstruktion der vier andern Vierecke gegeben sind. Da aber jedes dieser Vierecke nur in einem Exemplare vorhanden ist, so deckt das fünfte Viereck die vier andern.

Da die fünf Vierecke in § 28 einander decken, so kann man jedem derselben die Eigenschaften der andern zuschreiben. Daraus folgen die Sätze:

a) In jedem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten und Winkel gleich; die Diagonalen halbieren einander.

b) Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn in ihm:

1) Je zwei gegenüberliegende Seiten gleich sind.
2) Zwei gegenüberliegende Seiten gleich und parallel sind.
3) Je zwei gegenüberliegende Winkel gleich sind.
4) Die Diagonalen einander halbieren.

Das Resultat der halben Umdrehung des Vierecks läfst sich auch in dem Satze aussprechen:

c) Das Parallelogramm ist symmetrisch für den Schnittpunkt der Diagonalen. Jede durch A gezogene Gerade PP' teilt das Parallelogramm in zwei einander entsprechende Vierecke (bezüglich „Dreiecke"). Eine solche Gerade PP' wird im Punkte A halbiert und heifst ein Durchmesser des Parallelogramms.

§ 30. Die besonderen Parallelogramme.

Fig. 53.

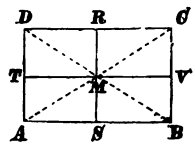


Fig. 54.

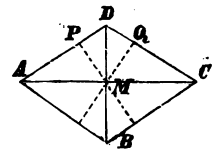
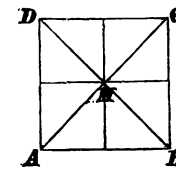


Fig. 55.



a) Wenn in einem Parallelogramm ein Winkel ein rechter ist, so sind es alle. Die Figur heifst Rechteck. Das Rechteck hat zwei Symmetrieachsen, von denen jede die Mittelsenkrechte von zwei Gegenseiten ist. Die Diagonalen sind gleich. Um das Rechteck kann ein Kreis beschrieben werden.

α) Wenn in einem Parallelogramm zwei Nachbarseiten gleich sind, so sind alle Seiten gleich und die Figur heifst Rhombus. Jede Diagonale ist eine Symmetrieachse der Figur; sie halbiert die Winkel, welche sie durchzieht, und halbiert auch die andere Diagonale senkrecht. In den Rhombus kann ein Kreis beschrieben werden.

Beweise. a) Wenn der Winkel A (Fig. 53) recht ist, so beweist man mit mehrmaliger Anwendung von § 8 d, dafs die anderen Winkel auch recht sind. Man verbinde sodann die Mittelpunkte R und S von zwei Gegenseiten mit einander. Dann ist $RS \parallel CB$ nach § 29 b, 2, und RS wird als Mittelsenkrechte der

Gegenseiten DC und AB erkannt. Dann entsprechen sich A und B, C und D für die Achse RS (§ 6 b), d. h. RS ist eine Symmetrieachse des Rechtecks. Die Diagonalen AC und DB entsprechen sich für diese Achse und sind deshalb gleich. Ebenso beweist man die analogen Behauptungen für die Achse TV. Die vier Strecken MA, MB, MC, MD sind als Hälften der gleichen Diagonalen auch gleich, und die vier Ecken liegen daher auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte M.

α) Wenn die Seiten AB und BC des Parallelogramms (Fig. 54) dieselbe Länge a haben, so folgt aus § 29 a, dafs auch die übrigen Seiten diese Länge a haben. Der Rhombus kann aber auf doppelte Weise als Deltoïd (§ 27) betrachtet werden. Folglich halbiert nach § 27 a jede Diagonale die Winkel, die sie durchzieht, und jede Diagonale ist die Mittelsenkrechte der andern. Die aufeinander folgenden Seitenabstände MP und MQ sind gleich, weil M auf der Halbierungslinie des Winkels ADC liegt (§ 20 α). Wenn je zwei aufeinander folgende Seitenabstände gleich sind, so sind es alle, und M ist der Mittelpunkt eines Kreises, welcher die 4 Seiten des Rhombus berührt.

b) Ein Viereck, welches Rechteck und Rhombus zugleich ist, das heifst, welches lauter rechte Winkel und lauter gleiche Seiten hat, heifst Quadrat. Das Quadrat hat 4 Symmetrieachsen. Zwei derselben sind Diagonalen. Die übrigen verbinden die Mitten der Gegenseiten.

Sehnenviereck und Tangentenviereck. § 31.

Fig. 56.

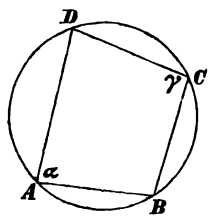
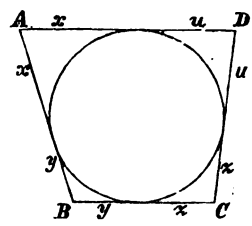


Fig. 57.



a) In einem Viereck, dessen Ecken auf dem Kreise liegen (Sehnenviereck), ist die Summe zweier Gegenwinkel 180^0.

α) In einem Viereck, dessen Seiten einen Kreis berühren (Tangentenviereck), ist die Summe je zweier Gegenseiten gleich grofs.

Beweise. a) (Fig. 56.) $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{DCB}$; $\gamma = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{DAB}$; $\alpha + \gamma = \frac{1}{2} \cdot 360^0 = 180^0$ (vgl. § 24 b).

α) Die gleichen Tangentenabschnitte (§ 16 c) in Fig. 57 sind mit gleichen Buchstaben bezeichnet. Man liest ab, dafs die Summe je zweier Gegenseiten $x + y + z + u$ ist.

b) Das Rechteck*) ist das einzige Parallelogramm, um welches man einen Kreis beschreiben kann.

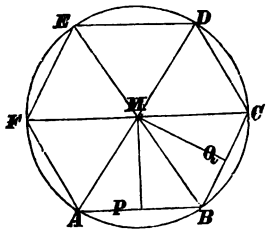
β) Der Rhombus ist das einzige Parallelogramm, in welches man einen Kreis beschreiben kann.

§ 82. Regelmäfsige Vielecke.

Die folgenden Aufgaben setzen voraus, dafs man sich den Vollwinkel oder die Kreislinie in n gleiche Teile geteilt denke (n eine ganze Zahl). Die Ausführung dieser Konstruktion mit Zirkel und Lineal ist jedoch nur in einzelnen Fällen möglich, z. B. für $n = 6$ und $n = 10$ und die daraus durch Halbierung oder fortgesetzte Verdoppelung von n erhaltenen Zahlen.

a) Wenn man in einem Kreise n Radien zieht, welche den Winkelraum um den Mittelpunkt in n gleiche Teile teilen, so entstehen auf der Peripherie die Ecken eines Vielecks, welches lauter gleiche Seiten und Winkel hat (regelmäfsiges n-Eck, Fig. 58).

Fig. 58.



Beweis. Man lasse das Vieleck eine Drehung von $\frac{360^0}{n}$ um den Mittelpunkt beschreiben. Dann deckt jeder Radius den folgenden Radius der Fig. 58, und daher fällt auch jedes Eck des Vielecks auf das folgende Eck. Dabei deckt auch jede Seite die folgende, woraus die Gleichheit aller Seiten folgt. Ferner deckt jeder Winkel den folgenden, so dafs auch die Gleichheit aller Vieleckswinkel erkannt wird.

b) Aufgabe. Über der Seite $AB = s$ (Fig. 58) ein regelmäfsiges n-Eck zu zeichnen.

Analyse. Die gemeinsame Gröfse aller Vieleckswinkel ist $\alpha = (n - 2) \cdot 180^0 : n$. Seien nun A und B zwei Ecken des Vielecks ($AB = s$), so ist ein Ort für die Lage des folgenden Eckpunktes der freie Schenkel des in B angetragenen Winkels α. Ein zweiter Ort ist der mit s um B beschriebene Kreis. Man erhält also für den dritten Eckpunkt C nur eine Lage und so fort,

*) Das Quadrat wird zugleich als Rechteck und als Rhombus betrachtet.

so dafs über der Seite $AB = s$ nur ein einziges regelmäfsiges n-Eck konstruiert werden kann. Die Konstruktion nach der Analyse ist leicht auszusprechen. Man erhält aber nach a) dieses einzig mögliche n-Eck auch, indem man die in a) beschriebene Konstruktion in einem Kreise vornimmt, welcher über der Sehne s den Centriwinkel $360^0 : n$ fafst.

Folgerung. Jedes regelmäfsige n-Eck kann in einen Kreis gezeichnet werden.

c) Um und in jedes regelmäfsige Vieleck läfst sich ein Kreis beschreiben. Die Mittelpunkte beider Kreise fallen in einen Punkt (Mittelpunkt des Vielecks). Durch diesen Punkt gehen die Mittelsenkrechten der Seiten und die Halbierungslinien der Winkel.

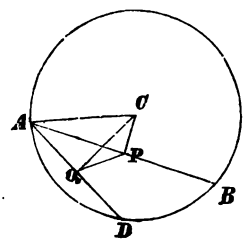
Nach der Folgerung aus b) läfst sich jedes regelmäfsige Vieleck (n-Eck) in einen Kreis zeichnen. Hiermit ist schon bewiesen, dafs ein Kreis um das Vieleck beschrieben werden kann. In der Figur 58 deckt aber nach $\frac{1}{n}$ Umdrehung jedes Dreieck wie AMB, BMC das folgende. Folglich decken sich auch die Höhen der aufeinander folgenden Dreiecke, d. h. alle Seiten des Vielecks haben vom Mittelpunkte denselben Abstand. Ein Kreis, der mit diesem Abstand als Radius um M beschrieben ist, berührt alle Seiten des Vielecks. Nun gehen die Mittelsenkrechten der Seiten (Sehnen) nach § 20 a und die Halbierungslinien der Vieleckswinkel (Tangentenwinkel) nach § 20 α durch den Mittelpunkt.

Anmerkung. Die Radien des dem Vieleck umbeschriebenen und des einbeschriebenen Kreises heifsen der grofse und der kleine Radius des regelmäfsigen Vielecks.

Der Kreis als Grenzfigur regelmäfsiger Vielecke. § 33.

a) 1) Zu gleichen Sehnen gehören gleiche Centriwinkel und gleiche Abstände vom Mittelpunkt. 2) Wenn man eine Sehne AB um A so dreht, dafs der Winkel mit dem Radius AC wächst, so nimmt die Entfernung der Sehne vom Mittelpunkt zu. Die Sehne selbst und der Centriwinkel nehmen ab. Hat der Winkel CAB durch dieses Wachsen 90^0 erreicht, so ist die Entfernung der Sehne vom Mittelpunkt dem Radius gleich und die Länge der Sehne ist Null geworden.

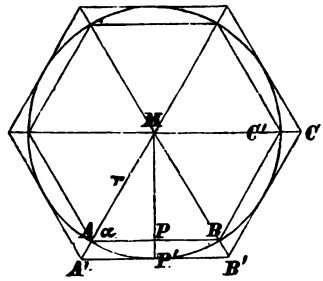
Fig. 59.



Beweise. 1) Gleiche Sehnen sind entsprechende Seiten in zwei Dreiecken, deren übrige Seiten als Radien auch entsprechend gleich sind. Diese Dreiecke sind nach § 19 a kongruent und daraus folgt nach § 18 f die Gleichheit der zugehörigen Centriwinkel. Bringt man die Centriwinkel durch Drehung um den Mittelpunkt zur Deckung, so decken sich auch die beiden Dreiecke und ihre Höhen, welche eben die Entfernungen beider Sehnen sind. 2) Wenn der Winkel CAB durch Wachsen zum Winkel CAD wird, so nimmt sein Komplementwinkel ACP ab und wird zum Winkel ACQ. AP und CQ müssen sich notwendig schneiden. Dann ist $\sphericalangle AQP$ gröfser als $\sphericalangle AQC$ oder gröfser als 90^0. Folglich liegt ihm die gröfste Seite des Dreiecks APQ gegenüber und $AP > AQ$ (§ 12 α). Was von den halben Sehnen gilt, gilt auch von den ganzen. — Ebenso folgt, dafs $\sphericalangle QPC$ stumpf ist und $CQ > CP$. Wenn der Winkel CAB bis 90^0 gewachsen ist, so ist die Sehne AB in die Tangente des Punktes A übergegangen, die Entfernung derselben vom Mittelpunkt ist dem Radius CA gleich und die Länge der Sehne AB ist Null geworden.

b) Der Kreis ist die Grenzfigur, in welche ein regelmäfsiges Vieleck übergeht, wenn seine Seitenzahl ins Unbegrenzte wächst.

Fig. 60.



Die Aufsenwinkel des regelmäfsigen n-Ecks haben die Gröfse $\frac{360^0}{n}$. Jeder Vieleckswinkel ist daher $180^0 - \frac{360^0}{n}$, und der Winkel α (Fig. 60), welchen eine Vieleckseite mit dem durch einen ihrer Endpunkte gehenden Radius bildet, wird $90^0 - \frac{180^0}{n}$ betragen. Wenn sich die Seitenzahl n fortwährend vergröfsert, so nähert sich dieser Winkel 90^0 und die Differenz PP' (Fig. 60) zwischen dem kleinen und grofsen Radius wird nach a) immer kleiner. Dadurch kann das umbeschriebene Vieleck (Fig. 60) dem Zusammenfallen mit dem einbeschriebenen Vieleck und dem dazwischen liegenden Kreise beliebig nahe gebracht werden.

IV. Abschnitt.

Von der Fläche der Figuren.

Flächen, welche kongruent sind oder sich aus kongruenten Stücken zusammensetzen. § 34.

a) Kongruente Figuren, insbesondere Figuren, welche sich für eine Achse oder ein Centrum symmetrisch entsprechen, haben gleiche Fläche.

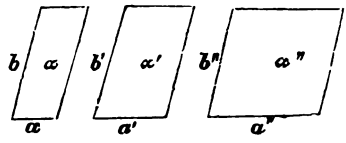
Beispiel. Die beiden Dreiecke, in welche ein Parallelogramm durch eine Diagonale geteilt wird, haben gleiche Fläche, denn sie entsprechen sich symmetrisch für den Mittelpunkt des Parallelogramms.

b) Für Parallelogramme, deren Winkel entsprechend gleich sind, gelten folgende Sätze:

1) Wenn die homologen Seiten b, b', b'' gleich sind, so verhalten sich die Parallelogramme wie die Nachbarseiten a, a', a''.

2) Wenn die homologen Seiten nicht gleich sind, so verhalten sich die Parallelogramme wie die Produkte $a \,.\, b$, $a' \,.\, b'$, $a'' \,.\, b''$ zweier Nachbarseiten.

Fig. 61.



Beweis. 1) Die Seiten b, b', b'' (Fig. 61) seien gleich. Alsdann gehört zu jeder Seite a, a', a'' ein bestimmtes Parallelogramm. Wenn die Seiten a und a' gleich sind, so sind es auch die zugehörigen Parallelogramme α und α' (§ 28 c und 34 a). Wenn die Seite a'' die Summe der Seiten a und a' ist, so wird auch das zugehörige Parallelogramm α'' die Summe von α und α' sein. Demnach folgt aus § 60 die Proportion

$$\alpha : \alpha' : \alpha'' = a : a' : a''.$$

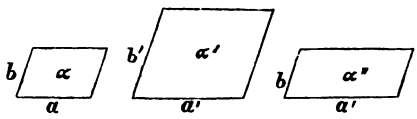
2) Um $\alpha : \alpha' = a \,.\, b : a' \,.\, b'$ zu beweisen (Fig. 62), nehme man das Parallelogramm α'' mit den Seiten a' und b zu Hilfe. Dann hat man nach 1)

$$\begin{aligned} \alpha : \alpha'' &= a : a' \\ \alpha'' : \alpha' &= b : b' \\ \hline \alpha \,.\, \alpha'' : \alpha'' \,.\, \alpha' &= a \,.\, b : a' \,.\, b' \end{aligned}$$

und weil α'' sich forthebt:

$$\alpha : \alpha' = a \,.\, b : a' \,.\, b'.$$

Fig. 62.

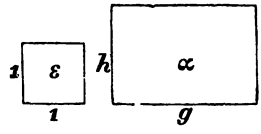


§ 35. Berechnung der Flächen von Rechtecken und Dreiecken.

Die Flächenzahl einer Figur (auch kurz Fläche genannt und mit ω bezeichnet*) ist das Verhältnis der Fläche zur Flächeneinheit, oder diejenige Zahl, mit welcher man die Flächeneinheit vermehren mufs, um die Fläche der Figur zu erhalten. Als Flächeneinheit nimmt man ein Quadrat, dessen Seite der Längeneinheit (Meter) gleich ist (Quadratmeter).

a) Die Fläche eines Rechtecks ist gleich dem Produkte aus Grundlinie und Höhe. $\omega = g \,.\, h$**).

Fig. 63.



b) Die Fläche eines Quadrats ist gleich der zweiten Potenz einer Seite. $\omega = g^2$.

c) Die Fläche eines Dreiecks ist die Hälfte des Produktes aus Grundlinie und Höhe. $\omega = \frac{g \,.\, h}{2}$.

Beweise. a) Das Rechteck α in Fig. 63 und die Flächeneinheit ε sind Parallelogramme von entsprechend gleichen Winkeln. Daher ist

$$\omega = \alpha : \varepsilon = g \,.\, h : 1 \,.\, 1 \text{ oder } \omega = g \,.\, h.$$

b) Das Quadrat ist ein Rechteck mit gleichen Seiten. Daher ist $\omega = g \,.\, g = g^2$.

c) Wenn das Dreieck rechtwinklig ist, so ergänze man es zu einem Rechteck (Fig. 64), welches mit dem Dreieck gleiche Grundlinie g und die gleiche Höhe h haben wird. Die Fläche des Rechtecks ist $g \,.\, h$. Da dasselbe aus zwei gleichen (§ 34 a) Dreiecken besteht, deren eines das gegebene ist, so ist die Fläche eines solchen Dreiecks $\frac{g \,.\, h}{2}$.

Fig. 64.

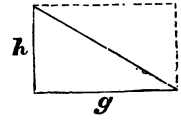


Fig. 65.

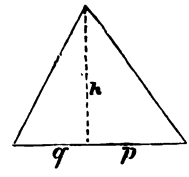
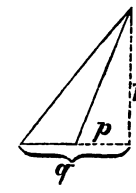


Fig. 66.



*) Der griechische Buchstabe ω (Omega), der in der Stereometrie zur Bezeichnung der Oberfläche gebraucht ist, soll auch hier für die Bezeichnung der Flächenzahl ebener Figuren gebraucht werden.

**) Genauer: die Flächenzahl ist gleich dem Produkte aus den Längenzahlen von Grundlinie und Höhe.

Ist das Dreieck nicht rechtwinklig, so unterscheide man die Fälle von Fig. 65 und 66.

Im ersten Falle hat man $\omega = \frac{q \cdot h}{2} + \frac{p \cdot h}{2} = \frac{(q+p)h}{2} = \frac{g \cdot h}{2}$.

Im zweiten Falle dagegen $\omega = \frac{q \cdot h}{2} - \frac{p \cdot h}{2} = \frac{(q-p)h}{2} = \frac{g \cdot h}{2}$.

Anmerkung. Das Quadratmeter wird in Quadratdecimeter (qdm), das letztere in Quadratcentimeter (qcm) und dieses in Quadratmillimeter (qmm) geteilt. Es sind diese Flächen Quadrate, deren Seiten der Reihe nach 1 dm, 1 cm, 1 mm betragen. Aus b) ergiebt sich, dafs die Einteilungszahl des Quadratmeters 100 ist, das heifst:

1 qm = 100 qdm = 10 000 qcm = 1 000 000 qmm.

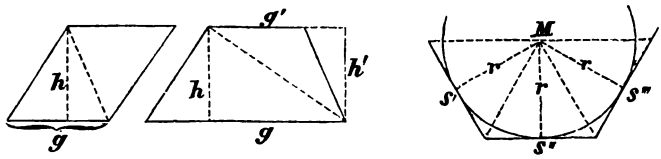
Ferner ist

1 Quadrathektometer (Hektar = ha) = 100 Quadratdekameter (Ar = a) = 10 000 qm.

Flächen von Parallelogrammen, Trapezen, Tangentenvielecken. § 36.

a) Die Fläche eines Parallelogramms ist gleich dem Produkte aus Grundlinie und Höhe: $\omega = g \cdot h$.

Fig. 67. Fig. 68. Fig. 69.



b) Die Fläche eines Trapezes (Viereck mit nur zwei parallelen Seiten) ist gleich dem Produkte aus der Höhe und der Hälfte von der Summe der parallelen Seiten. $\omega = \frac{g+g'}{2} \cdot h$.

c) Die Fläche eines dem Kreise umbeschriebenen Vielecks ist gleich der Hälfte des Produktes aus dem Umring des Vielecks und dem Radius des Kreises. $\omega = \frac{u \cdot r}{2}$.

Beweise. a) Das Parallelogramm (Fig. 67) ist das Doppelte eines Dreiecks von derselben Grundlinie und Höhe (§ 34 a). Da die Fläche des Dreiecks $\frac{g \cdot h}{2}$ ist, so ist diejenige des Parallelogramms $g \cdot h$.

b) Das Trapez (Fig. 68) besteht aus zwei Dreiecken, welche

die Flächen $\frac{g \cdot h}{2}$ und $\frac{g' \cdot h}{2}$ haben. Durch Addition ergiebt sich $\frac{g + g'}{2} \cdot h$.

c) Die Fläche besteht aus Dreiecken, welche je eine der Seiten s', s'', s''' ... des Vielecks zur Grundlinie und den Radius des Kreises zur Höhe haben. Man addiere die Flächen dieser Dreiecke und setze $s' + s'' + s''' \cdots = u$.

§ 37. Folgerungen aus § 35 und § 36 Verhältnisse von Flächen.

a) Parallelogramme (Rechtecke, Dreiecke) von gleicher Grundlinie und Höhe haben gleiche Fläche.

Parallelogramme (Rechtecke, Dreiecke) von gleicher Fläche und Grundlinie (Höhe) haben gleiche Höhe (Grundlinie).

Beweis. Wenn die Grundlinien und Höhen gleich sind, so sind es auch die Produkte, d. h. die Flächen. Wenn die Flächen und Grundlinien gleich sind, so sind es auch die Quotienten derselben, d. h. die Höhen.

b) 1) Rechtecke (Dreiecke, Parallelogramme) verhalten sich wie die Produkte von Grundlinie und Höhe. Bei gleicher Höhe verhalten sie sich wie ihre Grundlinien und bei gleicher Grundlinie wie ihre Höhen.

2) Parallelogramme (Dreiecke), welche einen Winkel entsprechend gleich haben, verhalten sich wie die Seiten, welche diesen Winkel einschliefsen.

Der Beweis zu 2) ergiebt sich für Parallelogramme aus § 34b, 2, für Dreiecke aber aus der Bemerkung, dafs jedes Dreieck halb so grofs ist als ein Parallelogramm, welches mit ihm jenen Winkel und die einschliefsenden Seiten gemeinsam hat.

§ 38. Der Pythagoreische Lehrsatz. — Aufgaben.

a) Wenn man in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse durch die Höhe teilt, so ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Rechteck über der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt derselben.

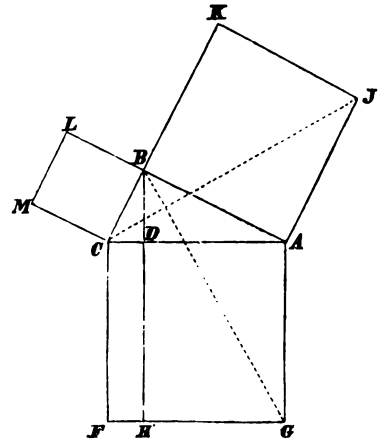
α) In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten (Pythagoreischer Lehrsatz).

Beweise. a) Das Dreieck GAB (Fig. 70) fällt durch eine Viertelsdrehung um A mit dem Dreieck CAJ zusammen, hat also mit ihm dieselbe Fläche. Nun ist aber $\triangle GAB$ die Hälfte von Rechteck $GADH$ (§ 35a und c) und $\triangle CAJ$

ist die Hälfte von dem Quadrate $AJKB$. Folglich hat auch dieses Quadrat dieselbe Fläche wie jenes Rechteck.

α) Der Beweis ergiebt sich aus a), indem man die Summe der Quadrate $BAJK$ und $BLMC$ in Fig. 70 der Summe der Rechtecke $ADHG$ und $CDHF$ gleichsetzt, welche zusammen das Quadrat $ACFG$ bilden.

Fig. 70.



b) Zusatz. In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete gleich der Differenz der Quadrate über der Hypotenuse und der andern Kathete.

c) Aufgabe. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

γ) Aufgabe. Ein Quadrat zu konstruieren, welches die Summe (Differenz) zweier gegebenen Quadrate ist.

Auflösung. c) (Fig. 70.) $ADHG$ sei das gegebene Rechteck. Man verlängere die kürzere Seite AD, bis sie AG gleich wird ($AC = AG$), und beschreibe über AC als Durchmesser einen Halbkreis. Die Verlängerung der Seite DH schneidet denselben in einem Punkte B, und AB ist die Seite des gesuchten Quadrats (Satz a).

γ) Wenn das gesuchte Quadrat die Summe der gegebenen sein soll, so konstruiere man ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Seiten der gegebenen Quadrate Katheten sind. Die Hypotenuse dieses Dreiecks ist die Seite des gesuchten Quadrats. Soll das gesuchte Quadrat die Differenz der gegebenen sein, so ist die Seite desselben Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck, in welchem die Hypotenuse und die andere Kathete den Seiten der gegebenen Quadrate gleich sind.

Die Quadrate der Seiten schiefwinkliger Dreiecke. § 39.

a) Das Quadrat einer Dreiecksseite, welche einem spitzen (stumpfen) Winkel gegenüber liegt, wird erhalten, indem man die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten vermindert (vermehrt) um das doppelte Rechteck aus der einen dieser Seiten und der Projektion der andern auf dieselbe.

Fig. 71.

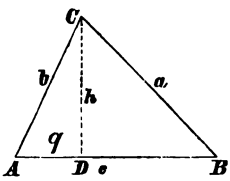
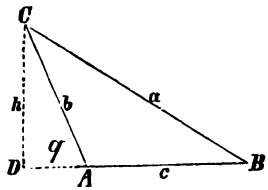


Fig. 72.



Beweis. Aus Dreieck CBD hat man nach § 38α u. 35b

$$a^2 = h^2 + (c \mp q)^2.*)$$

Hierin ersetzt man h^2 durch den aus Dreieck CDA genommenen Wert $b^2 - q^2$.

$$a^2 = b^2 - q^2 + c^2 \mp 2cq + q^2 = b^2 + c^2 \mp 2cq.$$

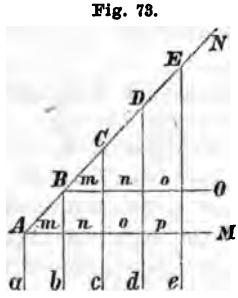
V. Abschnitt.

Ähnliche Punktreihen.

Schnitt eines Winkels mit Parallelen.

§ 40. **a)** Wenn man auf einem Winkelschenkel gleiche Stücke abträgt und durch die Teilpunkte Parallelen zieht, so entstehen auf dem andern Schenkel auch gleiche Abschnitte.

Fig. 73.



Beweis. In Fig. 73 sei $AB = BC = CD \ldots$ und die Geraden a, b, c, d seien parallel. Man verschiebe die ganze Figur längs der Geraden AN um die Strecke AB. Dann fällt jeder der Punkte A, B, C ... auf den folgenden, jede der Geraden $a, b, c \ldots$ auf die folgende (§ 8d), und die Gerade AM kommt in die zu AM parallele Lage BO. Die Strecken $m, n, o \ldots$ auf AM kommen in die neuen Lagen $m, n, o \ldots$ auf BO, und man liest aus den entstandenen Parallelogrammen sofort ab:

$$m = n, \quad n = o, \quad o = p \ldots$$

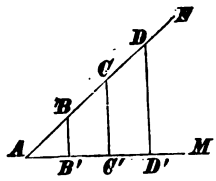
α) Wenn man auf einem Winkelschenkel die Länge x und auf dem andern die Länge y mehrmals abträgt, so sind die durch entsprechende Teilpunkte bestimmten Linien parallel.

---

*) Das obere Zeichen gilt für Fig. 71, das untere für Fig. 72.

Beweis. In Fig. 74 sei $AB = BC \ldots = x$, $AB' = B'C' \ldots = y$. Man ziehe BB' und ziehe auch durch $C, D \ldots$ Parallelen zu BB'. Die durch C gezogene Parallele mufs auf dem andern Schenkel ein Stück von der Länge y mit dem Anfangspunkt B' abschneiden und daher durch C' gehen. CC' ist also mit BB' parallel, u. s. w.

Fig. 74.



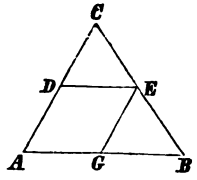
b) Zieht man durch die Mitte einer Dreiecksseite eine Parallele mit einer andern, so wird die dritte Seite ebenfalls halbiert.

Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz a).

β) Diejenige Strecke, welche die Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten verbindet, ist mit der dritten Seite parallel und halb so grofs wie diese.

Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus Satz α). Um zu zeigen, dafs $DE = \frac{1}{2} AB$, ziehe man $EG \parallel CA$. Dann ist $GA = GB = \frac{1}{2} AB$ (Satz b). Aus dem Parallelogramm $AGED$ folgt nun $DE = AG = \frac{1}{2} AB$.

Fig. 75.



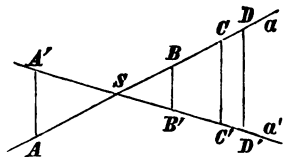
c) Aufgabe. Eine Strecke in n gleiche Teile zu teilen.

Auflösung. Um die Strecke AD in Fig. 74 in n (in der Figur $n = 3$) gleiche Teile zu teilen, ziehe man durch einen Endpunkt A eine Gerade AM und trage eine beliebige Länge y $n$mal ab. Den letzten Teilpunkt D' verbinde man mit D und ziehe durch die übrigen Teilpunkte Parallelen zu $D'D$, welche AD in n gleiche Teile teilen (Satz a).

Ähnliche Punktreihen auf konvergenten Trägern. § 41.

a) Wenn 2 konvergente Gerade von parallelen Linien geschnitten werden, so verhalten sich 2 Strecken der einen Geraden wie die entsprechenden Strecken der andern.

Fig. 76.



Beweis. In Fig. 76 ist durch die Parallelen zu jedem Punkte $A, B \ldots$ der Geraden a ein Punkt A', B' der Geraden a' zugeordnet. Wenn zwei Strecken auf a einander gleich sind, so sind nach § 40a auch die entsprechenden Strecken auf a' gleich. Ferner entspricht der Summe $BC + CD$ zweier Strecken auf a die Summe $B'C' + C'D'$

der homologen Strecken auf a'. Daraus folgt nach § 60, dafs zwei beliebige Strecken von a sich wie die entsprechenden Strecken von a' verhalten.

Zusatz. Zwei Punktreihen heifsen ähnlich, wenn ihre Punkte einander paarweise so entsprechen, dafs 2 Strecken der einen Reihe sich verhalten, wie die entsprechenden Strecken der andern. Die Punktreihen auf den konvergenten Geraden in a sind also ähnlich. Der Schnittpunkt der beiden Träger entspricht sich selbst.

Anmerkung. Von ähnlichen Punktreihen kann man auch sagen: Die Strecken $b, c, d \ldots$ der einen Reihe sind das $m$fache von den entprechenden Strecken $b', c', d' \ldots$ der andern Reihe, denn die Proportion $b' : c' : d' = b : c : d$ wird ersetzt durch $b' = m \cdot b$, $c' = m \cdot c \ldots$ (§ 59).

b) Umkehrung von a): Wenn die von dem Schnittpunkte S ausgehenden Abschnitte auf der einen Geraden sich wie die entsprechenden Abschnitte der andern verhalten, so sind die Verbindungslinien entsprechender Endpunkte (Projektionsstrahlen) parallel.

Beweis. In Fig. 76 sei

$$SB : SC = SB' : SC'. \qquad 1)$$

Man ziehe durch C eine Parallele zu BB' und beweise, dafs ihr Schnittpunkt M mit der Geraden a' kein anderer als der Punkt C' ist. In der That hat man nach § 41a)

$$SB : SC = SB' : SM. \qquad 2)$$

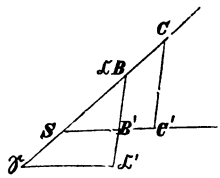
Aus 1) und 2) schliefst man

$$SB' : SC' = SB' : SM \quad \text{oder} \quad SC' = SM.$$

Zusatz: Die Punktreihen in b) sind ähnlich (nach § 41a und Zusatz).

c) Parallele Strecken, welche in einen Winkel eingelegt sind, verhalten sich wie die Abstände ihrer Endpunkte (auf demselben Winkelschenkel) vom Scheitel.

Fig. 77.



Beweis. Man verschiebe das Dreieck SCC' längs der Geraden SC, bis C in die Lage B oder $\mathfrak{C}$ kommt. Dann ist die neue Lage $\mathfrak{S}\mathfrak{C}'$ von SC' mit der alten parallel (§ 8c). Man hat nach Satz a) $B'B : \mathfrak{C}\mathfrak{C}' = SB : \mathfrak{S}\mathfrak{C}$, oder nach Einsetzung $B'B : C'C = SB : SC$.

Anmerkung. Bezeichnung der Länge und Richtung von Strecken.

Um für Strecken auf derselben Geraden oder auf parallelen Geraden die Beziehung zwischen ihren Längen und diejenige zwischen ihren Richtungen durch dasselbe Zeichen auszudrücken, verfährt man folgendermafsen.

Die zwei entgegengesetzten Richtungen einer Geraden werden als positive und negative Richtung unterschieden. Es ist der Wahl überlassen, welche Richtung man als die positive ansehen will, nur müssen, wenn parallele Geraden in der Figur vorhanden sind, die positiven Richtungen derselben übereinstimmen. Die Längenzahl einer Strecke erhält nun das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die Richtung von ihrem Anfangspunkte nach dem Endpunkte mit der positiven oder negativen Richtung der Geraden übereinstimmt, und die so definierte algebraische Gröfse wird bezeichnet, indem man den Buchstaben des Endpunktes hinter denjenigen des Anfangspunktes schreibt und dieses Symbol mit einer Klammer umgiebt. Wenn in Fig. 78 der Pfeil die positive Richtung bezeichnet und CA als Längeneinheit angesehen wird, so ist $(CA) = +1$, $(AB) = +3$, $(BA) = -3$, $(AB) = -(BA)$.

Fig. 78.

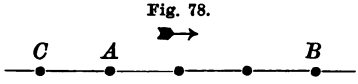
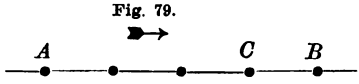


Fig. 79.



Der Quotient (das Verhältnis) und das Produkt zweier Strecken werden nach den Regeln der Algebra gebildet, so dafs dieselben positiv oder negativ werden, je nachdem die beiden Strecken gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben. So ist z. B. das Verhältnis $(CA : CB)$, welches das Abstandsverhältnis des Punktes C von den Punkten A und B heifst, positiv in Fig. 78, nämlich $(CA) : (CB) = +1 : 4$ und negativ in Fig. 79, nämlich $(CA) : (CB) = -3 : 1$.

Nimmt man jedoch auf die Richtung der Strecken keine Rücksicht, so bezeichnet man die Strecken durch die Buchstaben der beiden Endpunkte in beliebiger Ordnung und ohne Klammer. Diejenigen Zahlen, welche die Länge von Strecken, ihr Verhältnis oder Produkt ausdrücken, erhalten kein Vorzeichen, sondern sind als absolute Zahlen zu betrachten.

Mit Beziehung auf die Richtung der Strecken würde man für die ähnlichen Punktreihen in Fig. 76 schreiben:
$(SB) : (SC) = (SB') : (SC')$ und $(B'B) : (C'C) = (SB) : (SC)$.

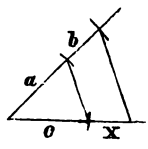
Aufgaben. § 42.

a) Satz und Aufgabe. Zwei ähnliche Punktreihen sind durch zwei Paare entsprechender Punkte bestimmt. Man soll

zu jedem weitern Punkte der einen Reihe den entsprechenden Punkt der andern finden.

Auflösung. Man vereine zwei der als entsprechend angegebenen Punkte in S (Fig. 76). Mit der Verbindungslinie BB' der übrigen gegebenen Punkte müssen die Projektionsstrahlen parallel sein (§ 41b). Der zu C gehörige Punkt C' wird also gefunden, indem durch C eine Parallele zu BB' gezogen wird.

Fig. 80.



b) Aufgabe. Zu drei Strecken a, b, c die vierte Proportionale x zu finden, das heifst die Proportion $a : b = c : x$ zu erfüllen.

Die Auflösung ist durch die Figur 80 versinnlicht. Durch den Endpunkt von b ist eine Parallele zu der Strecke gezogen, welche die Endpunkte von a und c verbindet. Zum Beweise wende § 41 a) an.

c) Die Strecke AB (Fig. 81) oder ihre Verlängerung nach einem gegebenen Verhältnis $r : s$ zu teilen, d. h. einen Punkt P auf dem Träger von AB zu finden, so dafs $PA : PB = r : s$.

Fig. 81.

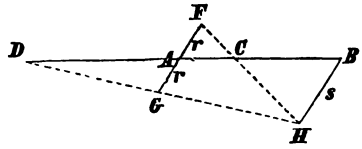
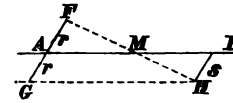


Fig. 82.



Auflösung. Man trage von A und B aus auf zwei Parallelen die Längen r und s nach entgegengesetzter (gleicher) Richtung ab und verbinde die Endpunkte F und H (G und H). Diese Verbindungslinie schneidet den Träger von AB in einem Punkte C (D), welcher die Strecke AB innerhalb (aufserhalb) nach dem Verhältnis $r : s$ teilt. Zum Beweise benutze man § 41 c).

γ) Aufgabe. Die Punkte C und D (Fig. 81) bilden, wie man sagt, mit A und B vier harmonische*) Punkte. (AB ist in C und D harmonisch geteilt.) Wenn ein beliebiger Punkt C auf dem Träger von AB gegeben ist, so soll man den zugeordneten vierten harmonischen Punkt bestimmen.

Auflösung. Ziehe durch A und B zwei Parallelen und schneide dieselben mit einer durch C gezogenen Geraden in F

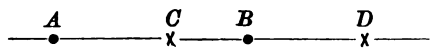
*) Siehe die Übungen § 7, Üb. 7.

und H. Mache AG gleich und entgegengesetzt gerichtet mit AF, so bestimmt die Gerade GH den gesuchten Punkt.

d) Lehrsatz. Wenn die Strecke AB durch die Punkte C und D harmonisch geteilt wird, so wird auch die Strecke CD durch die Punkte A und B harmonisch geteilt.

Beweis. Man leite zunächst, ohne auf das Vorzeichen der Strecken Rücksicht zu nehmen, aus der Proportion $CA : CB = DA : DB$, welche der Voraussetzung nach gilt, durch Vertauschung der mittleren Glieder $AC : AD = BC : BD$ ab, woraus die Behauptung mit Berücksichtigung der gegenseitigen Lage der Punkte sich ergiebt.

Fig. 83.



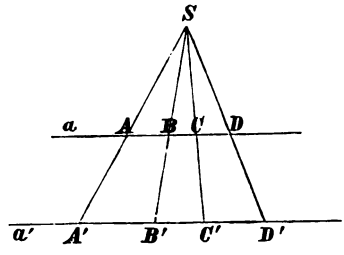
Anmerkung zu c). Um einzusehen, dafs C und D die einzigen Lagen des in Aufgabe c) gesuchten Punktes P sind, denke man sich das Verhältnis $r : s$ veränderlich und folge nachstehender Betrachtung (Fig. 81):

Macht man $GA = AF = BH$, so fällt der Punkt C in die Mitte M zwischen A und B (Fig. 82), der zugeordnete Punkt D hingegen fällt wegen des Parallelismus von AB und GH (Fig. 82) in unendliche Ferne. Läfst man die Strecken $AF = AG$ bis zum Zusammenfallen der Punkte F und G mit A abnehmen, während BH seine Länge beibehält, so rückt Punkt C aus der Mitte M gegen A und Punkt D aus unendlicher Ferne von links her ebenfalls gegen A, bis beide in A zusammentreffen. Gleichzeitig hat das Verhältnis $PA : PB = r : s$ von 1 bis 0 stetig abgenommen. Behält man aber die Länge von $AF = AG$ bei, während man BH bis zum Zusammenfallen der Punkte B und H abnehmen läfst, so wandert C von M gegen B, und D rückt von rechts her aus unendlicher Ferne gegen B, um zugleich mit C daselbst anzukommen. Dabei wächst der Wert des Verhältnisses $PA : PB = r : s$ von 1 aus bis über jede angebbare Zahl. Man sieht hieraus, dafs das Verhältnis $PA : PB$ nur zweimal einen gegebenen Wert annehmen kann. Man sieht hieraus ferner: in A wie in B fallen je zwei zugeordnete Punkte in einem einzigen zusammen. Wenn zwei Punkte C und D sich so bewegen, dafs sie jederzeit die Strecke AB harmonisch teilen, so bewegen sie sich in entgegengesetzter Richtung. Zwei zugeordnete Punkte liegen auf der gleichen Seite des Mittelpunktes von AB. Strecken, welche zugeordnete Punkte verbinden, schliefsen sich aus, oder die kleinere liegt innerhalb der gröfseren. Kreise, welche man über solchen Strecken als Durchmessern zieht, können sich nie schneiden.

§ 43. Ähnliche Punktreihen auf parallelen Trägern.

a) Parallele Gerade werden von den Strahlen eines Strahlbüschels in ähnlichen Punktreihen geschnitten. Die entsprechenden Strecken derselben sind gleich oder entgegengesetzt gerichtet, je nachdem der Mittelpunkt des Büschels aufserhalb oder innerhalb des Streifens gelegen ist.

Fig. 84.



Beweis. Die Verhältnisse $SA : SA'$, $SB : SB'$, $SC : SC'$... (Fig. 84) sind nach § 41 a gleich. Jedes der Verhältnisse $AB : A'B'$, $AC : A'C'$, $BC : B'C'$ .... ist aber durch eines jener andern Verhältnisse auszudrücken (§ 41 c).

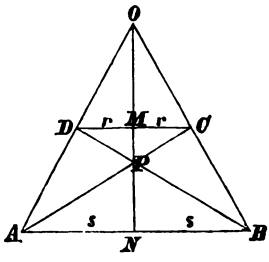
α) Wenn die Träger zweier ähnlichen Punktreihen parallel laufen, so sind alle Projektionsstrahlen Strahlen eines Büschels. Der Scheitel desselben teilt die Projektionsstrahlen aufserhalb oder innerhalb nach dem Verhältnis entsprechender Strecken.

Beweis. Die beiden Projektionsstrahlen AA' und BB' mögen sich in S schneiden. Man zeige, dafs SC die Gerade a' in keinem andern Punkte, als im entsprechenden Punkte C' schneidet. In der That, wenn der Schnitt von SC und a' mit P bezeichnet wird, so ist $AB : BC = A'B' : B'C'$ (nach Voraussetzung) und $AB : BC = A'B' : B'P$ (nach § 43 a). Daraus folgt $A'B' : B'C' = A'B' : B'P$, oder $B'C' = B'P$. — Die Punkte C' und P fallen zusammen.

§ 44. Anwendungen.

a) In jedem Trapez liegen die Mittelpunkte paralleler Seiten, der Schnittpunkt der konvergenten Seiten und der Schnittpunkt der Diagonalen auf einer Geraden. Der Abstand der beiden ersten Punkte wird durch die andern harmonisch geteilt.

Fig. 85.



Beweis. Nennt man die Hälften der parallelen Seiten r und s, so sieht man aus Aufgabe c) in § 42, dafs jede Diagonale die Strecke MN innen nach dem Verhältnis $r:s$ teilt, während jede der schiefen Seiten dasselbe aufsen thut. Hierdurch sind alle Behauptungen erwiesen.

b) Die Geraden aus den Mitten

der Dreiecksseiten nach den gegenüberliegenden Ecken (die Schwerpunktstransversalen) schneiden sich in einem Punkte (Schwerpunkt) und teilen einander nach dem Verhältnis 1 : 2.

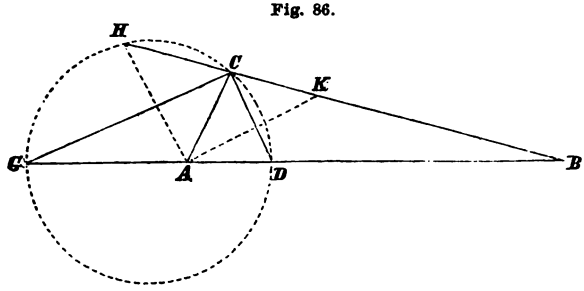
Beweis. Die Gerade DC (Fig. 85), welche die Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten verbindet, ist mit AB parallel und schneidet also ein Trapez ab. Die Mittellinien AC und BD schneiden sich als Diagonalen des Trapezes auf der Geraden, welche durch die Mitten von AB und DC, sowie durch O geht (Satz a), und demnach nichts anderes als die dritte Mittellinie des Dreiecks ist. Nun verhält sich nach § 41c $PC : PA = CD : AB = 1 : 2$.

Die Halbierungslinien der Dreieckswinkel. § 45.

a) Die Halbierungslinien eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels teilen die gegenüberliegende Seite innen und aufsen nach dem Verhältnis der anliegenden Seiten.

Beweis. (Fig. 86.) a) Wenn die Winkel ACD und DCB einander gleich sind, so beweise man (§ 8, d, § 12 β), dafs die durch A mit CD gezogene Parallele AH ein gleichschenkliges Dreieck AHC abschneidet. Der Parallelismus von AH und DC

Fig. 86.



liefert die Proportion $DA : DB = CH : CB$ (§ 41a), woraus man durch Einsetzen von CA für CH erhält: $DA : DB = CA : CB$. Wenn andererseits die Winkel ACG und GCH gleich sind, so ziehe man AK mit GC parallel und verfahre ganz wie im Vorigen, um $GA : GB = CA : CB$ zu erhalten. Aus diesen beiden Proportionen folgt die Behauptung. Da die Halbierungslinien der Winkel ACB und ACH die einzigen Geraden durch C sind, welche AB innen und aufsen nach dem Verhältnis $CA : CB$ teilen (Anmerk. zu § 42), so kann der Satz a) auch umgekehrt werden:

α) Diejenigen Geraden, welche durch die Spitze eines Dreiecks gehen und die gegenüberliegende Seite innen und

aufsen nach dem Verhältnis der andern Seiten teilen, sind die Halbierungslinien des Winkels an der Spitze und seines Nebenwinkels.

§ 46. **Anwendungen.**

a) Der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernungen von zwei festen Punkten A und B ein gegebenes Verhältnis bilden, ist ein Kreis, welcher AB nach demselben Verhältnis harmonisch teilt und die Strecke zwischen den Schnittpunkten zum Durchmesser hat.

Beweis. 1) Wenn (Fig. 86) $CA : CB = DA : DB = GA : GB$, so stehen CD und CG als Halbierungslinien zweier Nebenwinkel (§ 45 α) senkrecht auf einander. Hieraus folgt nach § 25 b, dafs C auf einem Kreise liegt, welcher die Strecke GD zum Durchmesser hat.

2) Wenn $DA : DB = GA : GB$ und C ein beliebiger Punkt des Kreises über dem Durchmesser DG ist, so mufs auch das Verhältnis $CA : CB$ dem gemeinsamen Wert der Verhältnisse $DA : DB$ und $GA : GB$ gleich sein. Hätte nämlich $CA : CB$ einen andern Wert, so würde C nach 1) noch auf einem zweiten Kreise liegen, welcher AB nach diesem andern Verhältnis innen und aufsen teilt, was unmöglich ist, da nach § 42 Anmerkung diejenigen Kreise sich nicht schneiden, welche die Abstände zugeordneter harmonischer Punkte zu Durchmessern haben. Aus 1) und 2) folgt die Behauptung.

α) Der geometrische Ort aller Punkte, von welchen aus zwei Strecken AD und DB (Figur 86) unter gleichen Winkeln gesehen werden, ist ein Kreis, welcher AB in D und G harmonisch teilt und die Strecke DG zum Durchmesser hat.

Der Beweis ergiebt sich aus § 45 und 46 a.

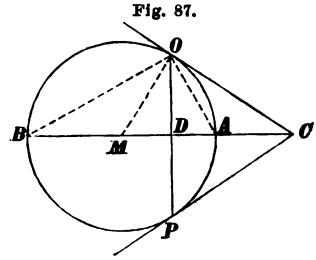
b) Aufgabe. Auf einer Geraden sind 3 Strecken AB, BC und CD gegeben. Man soll einen Punkt finden, von welchem aus diese Strecken unter gleichen Winkeln gesehen werden.

Auflösung. Man konstruiere den geometrischen Ort α) zweimal für die Strecken AB, BC und BC, CD. Wenn die beiden Kreise sich schneiden, so erhält man zwei Punkte der gesuchten Art, deren Abstand von AD senkrecht halbiert wird.

c) Ein Punkt C (Fig. 87) aufserhalb des Kreises und die zugehörige Berührungssehne teilen den durch C gezogenen Durchmesser harmonisch.

Beweis. (Fig. 87.) Wenn CO und CP Tangenten und AB der durch C gezogene Durchmesser ist, so sind die Bogen AO und AP und deshalb auch die Winkel COA und DOA einander gleich. Die Schenkel OA und OB des rechten Winkels AOB halbieren also in dem Dreieck COD den Winkel bei O und seinen Nebenwinkel, woraus (§ 45a) $AC:AD = BC:BD$ und (§ 42d) $CA:CB = DA:DB$ folgt.

Fig. 87.



VI. Abschnitt.

Ähnlichkeit der Figuren.

Ähnliche Figuren. § 47.

Definition.

a) Zwei Figuren (deren Punkte sich paarweise entsprechen) heifsen ähnlich, wenn man sie so in einen Strahlenbüschel legen kann, dafs je zwei entsprechende Punkte auf demselben Strahle liegen (perspektivische Lage) und die Abstände solcher Punkte vom Scheitel in einem festen Verhältnisse stehen.

Dabei mufs angegeben sein, ob je 2 entsprechende Punkte auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite des Scheitels S liegen sollen (diese Bestimmung kann jedoch, wie die Anmerkung erklärt, durch das Vorzeichen des Verhältnisses ausgedrückt sein). Im ersten Falle heifst der Punkt S innerer Ähnlichkeitspunkt, im zweiten Falle heifst er äufserer Ähnlichkeitspunkt der beiden Figuren. Jeder Strahl des Büschels S heifst ein Ähnlichkeitsstrahl. Verschiebt man die Figuren so, dafs nicht mehr je zwei entsprechende Punkte auf demselben Strahle eines Büschels liegen, so hat man eine „schiefe" Lage der ähnlichen Figuren erhalten.

Anmerkung. Wenn man auf die Vorzeichen der Strecken und ihrer Verhältnisse Rücksicht nimmt, so wird der Ähnlichkeitspunkt ein innerer sein, sobald der gemeinsame Wert der Verhältnisse $SA:SA'$, $SB:SB'$ ... negativ ist (Fig. 88 u. 90). Dagegen ist der Ähnlichkeitspunkt ein äufserer, wenn der Wert jener Verhältnisse positiv ist (Fig. 89 u. 91). Ist insbesondere

der Wert jener Verhältnisse $SA : SA'$, $SB : SB' \ldots$ der positiven Einheit gleich, so geht die Ähnlichkeit in Kongruenz über. Ist jener Wert der negativen Einheit gleich, so erhält man als besondern Fall der ähnlichen Figuren in perspektivischer Lage die centrische Symmetrie.

b) Zusatz zu a). Die zweite Bedingung der Definition für 2 entsprechende Punkte eines Strahles kann man auch so aussprechen: Die Abstände vom Ähnlichkeitspunkt bis zu den Punkten der einen Figur sind das $m$fache der entsprechenden Abstände für die andere Figur.

Beweis. Die Proportionen $SA' : SA = SB' : SB = SC' : SC \ldots$ werden durch die Gleichungen $SA' = m \,.\, SA$, $SB' = m \,.\, SB$, $SC' = m : SC \ldots$ ersetzt, wo m den gemeinsamen Wert jener Verhältnisse bezeichnet (§ 59).

c) Beispiele. 1) Die koncentrischen Kreisbogen in Fig. 88 oder Fig. 89 sind ähnliche Figuren. 2) Die parallelen Strecken AC und $A'C'$ in Fig. 90 oder Fig. 91 sind ähnliche Figuren.

Fig. 88.

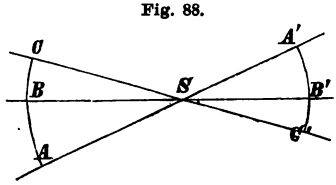


Fig 89.

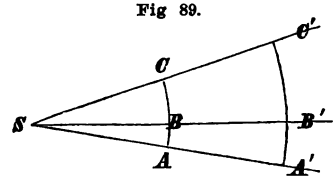


Fig. 90.

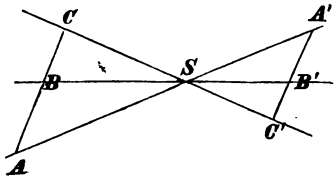
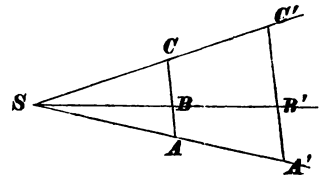


Fig. 91.



1) Je zwei (entsprechende) Kreispunkte liegen auf einem Strahle des Büschels S. Ihre Abstände von S stehen in demselben Verhältnis, nämlich in dem Verhältnis der Radien.

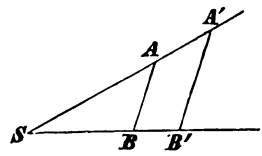
2) Je zwei (entsprechende) Punkte liegen auf einem Strahle des Büschels S. Ihre Abstände vom Scheitel stehen in demselben Verhältnis, denn nach § 41a hat man $SA' : SA = SB' : SB = SC' : SC$.

d) Wenn der Ähnlichkeitspunkt und zwei entsprechende Punkte eines Ähnlichkeitsstrahles gegeben sind, so kann

man zu jedem Punkte, der als Punkt der einen Figur angenommen wird, den entsprechenden Punkt der andern Figur angeben. Die Anzahl der Paare entsprechender Punkte in beiden Figuren ist also unbegrenzt. Der Ähnlichkeitspunkt ist der einzige sich selbst entsprechende Punkt beider Figuren.

S (Fig. 92) sei der Ähnlichkeitspunkt und AA' zwei entsprechende Punkte eines Ähnlichkeitsstrahles. Um zu B den homologen Punkt B' zu finden, hat man zu bedenken: 1) B' mufs auf dem Strahle SB liegen. 2) Wenn $SA' : SA$ mit m bezeichnet wird, so ist auch $SB' : SB = m$, oder $SB' = m \cdot SB$. Man kennt also die Strecke SB' (für die Richtung siehe das zur Definition a Bemerkte) und kommt durch Auftragen derselben zum Punkte B'. Soll der zu S gehörige Punkt gesucht werden, so bedenke man, dafs der Abstand des Punktes S vom Scheitel Null ist. Der Abstand des entsprechenden Punktes vom Scheitel mufs das $m$fache hiervon, also ebenfalls Null sein. Wenn aufserdem noch ein Punkt beider Figuren sich selbst entspräche, wenn z. B. A und A' zusammenfielen, so wäre $m = 1$ und die Figuren müfsten zusammenfallen.

Fig. 92.



Anmerkung. Wenn man im Auge hat, dafs die Anzahl der Paare entsprechender Punkte unbegrenzt ist, so spricht man auch wohl von ähnlichen Systemen*). Aus § 48 wird hervorgehen, dafs man auch zu jeder Geraden der Ebene, als einem Strahle des ersten Systems einen entsprechenden Strahl des zweiten Systems bestimmen kann.

Eigenschaften ähnlicher Figuren. § 48.

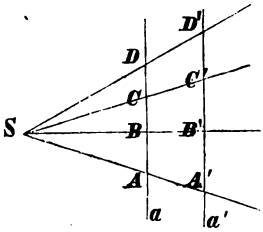
a) Wenn beliebig viele Punkte der einen Figur in einer Geraden a liegen, so liegen die entsprechenden

α) Wenn beliebig viele Strahlen der einen Figur durch einen Punkt A gehen, so gehen die entsprechenden Strahlen

*) Ein ebenes System ist die Gesamtheit der Punkte und Strahlen einer Ebene. Die Ebene heifst der Träger des Systems. Denkt man sich nun zwei Ebenen als zusammenfallend, so kann man von 2 ebenen Systemen auf demselben Träger sprechen. Im obigen Falle werden nun die Punkte und Strahlen der Ebene, sofern sie der einen Figur zugerechnet werden können, als Punkte des ersten Systems, und die Punkte und Strahlen derselben Ebene, sofern sie auch der zweiten Figur zugerechnet werden können, als Punkte des zweiten Systems angesehen.

Punkte auf einer zu a parallelen*) Geraden a'. Die Geraden a und a' heifsen entsprechende Strahlen beider Figuren.

Fig. 93.



der zweiten Figur durch den entsprechenden Punkt A'.

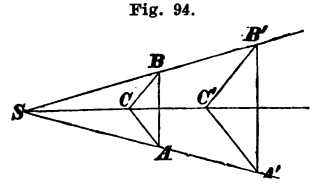
Es ist in § 47 c bewiesen worden, dafs den Punkten A, B, C, D einer Geraden a (Fig. 93) die Punkte einer Geraden a' entsprechen, welche durch den Punkt A', welcher A entspricht, parallel zu a gezogen ist. Beliebig vielen Strahlen durch A entsprechen also ebensoviele Strahlen durch A'.

b) Je zwei entsprechende Strecken bilden dasselbe Verhältnis**).

β) Je zwei entsprechende Winkel sind gleich. (Siehe die Übungen § 8 Ub. 14.)

b) Man setze die perspektivische Lage voraus. 1) Für die Strahlen des Büschels hat man (§ 47 a) $SA' : SA = SB' : SB = SC' : SC = m$ (Fig. 94). Wende den Zusatz zu § 41 b an. 2) Für entsprechende Strecken auf parallelen Geraden folgt aus § 41 c) $A'B' : AB = SA' : SA = m$ und $B'C' : BC = SB' : SB = m$.

Fig. 94.



β) Entsprechende Winkel sind gleich, weil ihre Schenkel paarweise parallel laufen.

Zusatz zu b). Die Strecken der einen Figur sind das $m$fache von den entsprechenden Strecken der andern Figur und verhalten sich demnach wie diese entsprechenden Strecken.

Dies folgt aus den Gleichungen im Beweise von c), wenn man die Nenner wegschafft.

c) Aufgabe. Zu einer gegebenen Figur eine ähnliche zu zeichnen, wenn die Länge der Strecke $A'B'$ gegeben ist, welche der Strecke AB in der gegebenen Figur entspricht.

1) Lege die Strecke $A'B'$ auf AB, so dafs die Anfangs-

---

*) Bei perspektivischer Lage.

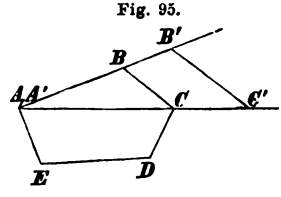
**) Ausführlicher heifsen die Sätze b) und β):

Jeder Punktreihe der einen Figur entspricht eine ähnliche Punktreihe der andern.

Jedem Strahlenbüschel der einen Figur entspricht ein kongruenter Strahlenbüschel der andern.

punkte AA' zusammenfallen. Dann ist AA' der Ähnlichkeitspunkt beider Figuren (siehe die letzte Behauptung in § 47 d), und man kennt die entsprechenden Punkte B, B' eines Ähnlichkeitsstrahles. Nach § 47 d kann man zu jedem Punkte C, D . . der ersten Figur den entsprechenden der zweiten Figur finden. Um C' zu finden, ziehe man durch B' die Parallele zu BC. Ihr Schnittpunkt mit der Verlängerung von AC ist der gesuchte Punkt.

Fig. 95.



2) Man kann auch die gesuchte Figur in schiefer Lage konstruieren. Da das Verhältnis $A'B' : AB = m$ gegeben ist, so kennt man die Länge aller Strecken der zweiten Figur, denn sie sind das $m$fache der entsprechenden Strecken in der ersten Figur (Zusatz zu c). Aufserdem sind alle Winkel der zweiten Figur bekannt, denn sie sind den entsprechenden Winkeln der ersten Figur gleich. Man findet also die Figur durch Wiederholung von Dreieckskonstruktionen.

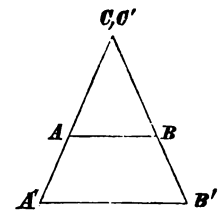
Anmerkung. Aus der zweiten Konstruktionsart erkennt man, dafs nur eine Figur als Lösung möglich ist. Die beiden in 1) und 2) erhaltenen Figuren sind daher nicht verschieden.

Ähnliche Dreiecke. § 49.

a) Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Winkel entsprechend gleich haben.

Beweis. Die Dreiecke seien mit den gleichen Winkeln bei C und C' auf einander gelegt (Fig. 96), und aufserdem seien die Winkel bei A und A' gleich. Alsdann sind die Seiten AB und $A'B'$ parallel und aus § 41 a) folgt $CA' : CA = CB' : CB$. Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind also ähnlich ($\triangle ABC \sim A'B'C'$) und in perspektivischer Lage; der Ähnlichkeitspunkt ist der Punkt CC' (§ 47 a).

Fig. 96.



b) Aufgabe. Dreiecke zu zeichnen, von welchen gegeben ist: 1) Das Verhältnis zweier Seiten und der eingeschlossene Winkel, 2) das Verhältnis zweier Seiten und der der gröfseren Seite gegenüberliegende Winkel, 3) die Verhältnisse der drei Seiten.

Auflösung. Man nehme für eine dieser Seiten eine beliebige Länge a an, dann kann man die übrigen in der Aufgabe

vorkommenden Seiten berechnen oder konstruieren und das Dreieck nach § 19 a), c), d) zeichnen.

Man erhält nach § 19 ein einziges Dreieck, es sei das Dreieck ABC in Fig. 96, wo $CB = a$ sein soll.

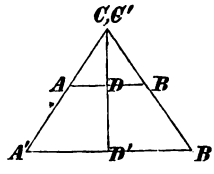
Für eine andere Seitenlänge a' der Seite a erhält man auf dieselbe Weise ebenfalls ein einziges Dreieck. Man findet aber dasselbe leichter, indem man CB' gleich a' macht und durch B' die Parallele $B'A'$ zu AB zieht, denn beide Dreiecke sind ähnlich und haben deshalb die Winkel und Seitenverhältnisse gleich.

Folgerung. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen 1) das Verhältnis zweier Seiten und der eingeschlossene Winkel, 2) das Verhältnis zweier Seiten und der der gröfseren gegenüberliegende Winkel, 3) die Verhältnisse der drei Seiten gleich sind.

c) In ähnlichen Dreiecken ist das Verhältnis entsprechender Transversalen (Höhen, Mittellinien ..) gleich dem Verhältnis entsprechender Seiten.

Beweis für die Höhen. Die Dreiecke seien in perspektivische Lage gebracht. Die durch den Ähnlichkeitspunkt C, C' (Fig. 97) auf AB gefällte Senkrechte ist auch senkrecht auf $A'B'$. Die Schnittpunkte D, D' (§ 47 c, 2) und folglich auch die Strecken CD und $C'D'$ sind entsprechend. Nun folgt die Behauptung aus § 48 b.

Fig. 97.



d) Die Umringe ähnlicher Dreiecke stehen im Verhältnis homologer Seiten.

Aus $a' = ma$, $b' = mb$, $c' = mc$ folgt durch Addition $a' + b' + c' = m(a + b + c)$ oder $a' + b' + c' : a + b + c = m$, womit die Behauptung erwiesen ist.

e) Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Aus $a' = m \cdot a$ und $h' = m \cdot h$ folgt

$$\frac{a' \cdot h'}{2} = m^2 \cdot \frac{a \cdot h}{2} \text{ oder } \frac{a' \cdot h'}{2} : \frac{a \cdot h}{2} = m^2,$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

§ 50. Kreise als ähnliche Figuren.

a) In ähnlichen Figuren (Systemen) entspricht jedem Kreise der einen Figur ein Kreis der andern. Die Mittelpunkte sind entsprechende Punkte.

Wenn die Punkte A, B ... (Fig. 98) auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte C liegen und C', A', B' ... die entsprechenden Punkte der andern Figur sind, so hat man $C'A' : CA = C'B' : CB$ ..... Da nun die Nenner CA, CB dieser Brüche gleich sind (gleich der Längenzahl des Radius im Kreise C), so müssen auch die Zähler gleich sein. Aus $C'A' = C'B'$ ... folgt aber, dafs die Punkte A', B' ... auf einem Kreise liegen, dessen Mittelpunkt C' dem Mittelpunkte C entspricht.

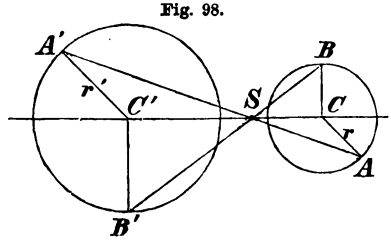
b) Zwei beliebige Kreise können in doppelter Weise als ähnliche Figuren betrachtet werden.

I. Für den innern Ähnlichkeitspunkt, der den Centralabstand innerhalb nach dem Verhältnis der Radien teilt, entsprechen sich die Endpunkte entgegengesetzt gerichteter Radien.

II. Für den äufsern Ähnlichkeitspunkt, der den Centralabstand aufserhalb nach dem Verhältnis der Radien teilt, entsprechen sich die Endpunkte gleichgerichteter Radien.

Beweis. I. CA und $C'A'$ sind Radien von entgegengesetzter Richtung. Nach § 41c hat man $SC' : SC = SA' : SA = r' : r$. Hieraus folgt: 1) Die Geraden, welche die Endpunkte entgegengesetzt gerichteter Radien verbinden, gehen alle durch den Punkt S, welcher den Centralabstand $C'C$ innen nach dem Verhältnis der Radien teilt. 2) Die Abstände der Endpunkte von S stehen immer in dem Verhältnisse $r' : r$. Wenn man also die Endpunkte entgegengesetzt gerichteter Radien als entsprechend ansieht, so liegen die Kreise so in dem Strahlenbüschel, wie es die Definition in § 47a verlangt, und sind ähnliche Figuren für den innern Ähnlichkeitspunkt S. Ebenso beweist man die Behauptung II.

Fig. 98.

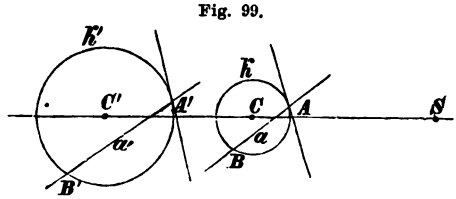


c) Wenn zwei Kreise sich für einen Ähnlichkeitspunkt entsprechen, so entsprechen sich auch die Sekanten mit ihren Schnittpunkten und die Tangenten mit ihren Berührungspunkten paarweise.

Beweis. Wenn ein Punkt auf der Geraden a und dem Kreise k zugleich liegt, so mufs der entsprechende Punkt auf der Geraden a' und dem Kreise k' zugleich liegen (§ 48a u. § 50a).

Also entspricht jedem der Schnittpunkte A und B von a mit k ein Schnittpunkt von a' und k'. Fallen aber jene beiden Schnittpunkte auf k in einen Punkt D, so müssen die homologen Punkte auf k' in den entsprechenden Punkt D' fallen, das heifst: einer Geraden a, welche k in D berührt, entspricht eine Gerade a', welche k' im homologen Punkte berührt.

Fig. 99.



Zusatz. Entsprechende Tangenten sind parallel und die zugehörigen Radien sind gleich oder entgegengesetzt gerichtet, je nachdem der Ähnlichkeitspunkt ein äufserer oder innerer ist.

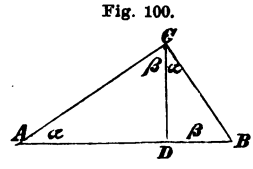
Anmerkung. Zwei Kreise bestimmen auf zweierlei Weise (durch den innern und durch den äufsern Ähnlichkeitspunkt) zwei ähnliche Systeme.

§ 51. Anwendungen auf das rechtwinklige Dreieck.

a) Wenn man in einem rechtwinkligen Dreieck die Höhe zieht, so ist eine Kathete die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt. Die Höhe selbst ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Beweis. In Fig. 100 sind die beiden Winkel α gleich, weil jeder mit dem bei C liegenden Winkel β einen rechten Winkel ausmacht. Ebenso zeigt man, dafs die beiden Winkel β gleich sind. Nun sind 1) die Dreiecke ACB und ADC ähnlich, weil sie die Winkel entsprechend gleich haben. Folglich verhalten sich die Seiten AB und AC des Dreiecks ABC wie die entsprechenden Seiten des andern Dreiecks, welche nun zu suchen sind: AB liegt dem rechten Winkel C gegenüber, folglich entspricht ihr die Seite AC des Dreiecks ADC, weil sie ebenfalls dem rechten Winkel gegenüber liegt. Der Seite AC des Dreiecks ABC aber, welche dem Winkel β gegenüber liegt, entspricht die Gegenseite AD des Winkels β im Dreieck ADC. Daher hat man die Proportion $AB : AC = AC : AD$.

Fig. 100.



2) Die Dreiecke ADC und CDB sind ebenfalls aus Gleich-

heit der entsprechenden Winkel ähnlich. Man findet auf entsprechende Weise:

$$AD : DC = DC : DB.$$

b) Aufgabe. Zu zwei Strecken a und b die mittlere Proportionale x zu suchen, oder die Proportion $a : x = x : b$ zu erfüllen.

1. Auflösung. Man trage von einem Punkte M aus die gegebenen Strecken nach den entgegengesetzten Richtungen einer Geraden (Fig. 101).

Über der hierdurch erhaltenen Strecke NP als Durchmesser errichte man einen Halbkreis. Dann ist das in denselben fallende Stück MQ einer in M errichteten Senkrechten die verlangte mittlere Proportionale.

2. Auflösung. Man trage von einem Punkte M (Fig. 102) einer Geraden aus die gegebenen Strecken nach der nämlichen Richtung auf dieser Geraden ab. Über MN als Durchmesser errichte man einen Halbkreis. Wenn die in P auf MN errichtete Senkrechte denselben in Q trifft, so ist MQ die gesuchte mittlere Proportionale.

Fig. 101.

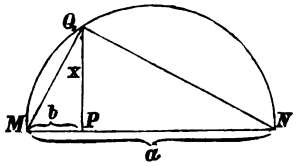
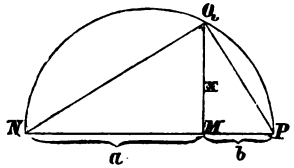


Fig. 102.



Anwendungen auf die Kreislehre. § 52.

a) Wenn man durch einen Punkt P Sekanten eines Kreises zieht, so hat das Produkt der durch diesen Punkt und den Kreis begrenzten Abschnitte für jede Sekante den gleichen Wert (Potenz des Punktes P).

Beweis. 1) AB und CD (Fig. 103) seien die Sehnen, welche auf 2 innerhalb des Kreises sich schneidenden Sekanten liegen. Man beweise mit Hilfe des § 24b die Ähnlichkeit der Dreiecke CPA und BPD nach § 49a), woraus die Proportion $PC : PA = PB : PD$ und die Gleichung $PC \,.\, PD = PA \,.\, PB$ folgt.

2) AB und CD (Fig. 104) seien 2 Sekanten, die sich aufserhalb des Kreises schneiden. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke PCB und PAD (§ 24b und § 49a) folgt: $PC : PA = PB : PD$ und $PC \,.\, PD = PA \,.\, PB$.

b) Zusatz. Wenn der Punkt P innerhalb des Kreises liegt, so ist die Potenz des Punktes P auch durch das

Fig. 103.

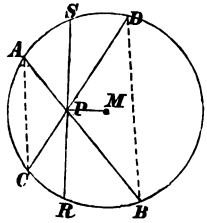
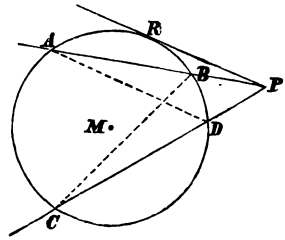


Fig. 104.



Quadrat von der Hälfte der kleinsten Sehne RS dargestellt. Wenn der Punkt P aufserhalb des Kreises liegt, so ist die Potenz des Punktes P gleich dem Quadrate des Tangentenabschnitts PR.

Beweis. Die zu PM senkrechte Sehne RS ist die kleinste der durch P gehenden Sehnen, weil sie den gröfstmöglichen Abstand von M hat (vgl. Übungen, § 6, Üb. 50). Die Abschnitte dieser Sehne sind nach § 26 b, 3 gleich, also ist $PA \cdot PB = PR^2$. Denkt man sich andererseits die Sekante PA gedreht, bis sie durch Zusammenfallen der Schnittpunkte zur Tangente wird, so bekommt man $PA \cdot PB = PR \cdot PR = PR^2$.*)

Anmerkung. Wenn man die Sekantenabschnitte, von welchen in a) die Rede ist, von dem Schnittpunkte der Sekanten aus durchlaufen denkt und nach § 41, Anmerk. die Vorzeichen der Abschnitte und ihrer Produkte bestimmt, so werden diese Produkte positiv oder negativ, je nachdem die Sekanten sich aufserhalb oder innerhalb der Kreise schneiden.

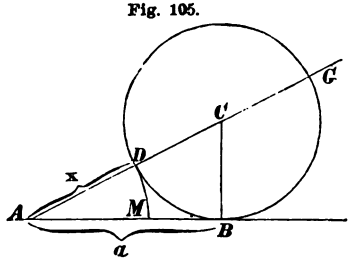
Die Potenz des Punktes P erhält im ersten Fall das positive, im zweiten Fall das negative Vorzeichen, während wir in den vorhergehenden Sätzen das mit dem Namen Potenz bezeichneten, was man bei Berücksichtigung der Vorzeichen nur den absoluten Wert der Potenz nennen kann. Man kann in den beiden Fällen der Figur 103 und der Figur 104 die Potenz durch das Quadrat des Radius r und das Quadrat der Entfernung $MP = d$ ausdrücken. Nimmt man dabei auf das Vorzeichen der Potenz Rücksicht, so findet man, dafs die Potenz immer durch $d^2 - r^2$ dargestellt ist, welcher Ausdruck positiv oder negativ ist, je nachdem P aufserhalb oder innerhalb des Kreises liegt.

*) Dies kann auch in dem Satze ausgesprochen werden: Der Tangentenabschnitt ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Sekantenabschnitten.

c) Eine gegebene Strecke a stetig zu teilen, das heifst sie so zu teilen, dafs der gröfsere Abschnitt x die mittlere Proportionale zwischen der Strecke a und dem Reste $a - x$ ist. $a : x = x : a - x$ oder $x^2 = a(a - x)$.

Auflösung. AB (Fig. 105) sei die gegebene Strecke a. Trage $BC = \frac{a}{2}$ in B senkrecht auf und ziehe um C mit dem Radius CB einen Kreis, der AB in B berühren wird. Verbinde A mit C, so ist das Stück AD der gesuchte Abschnitt x. Die Strecke AB ist stetig geteilt, wenn AD nach AM getragen wird.

Fig. 105.



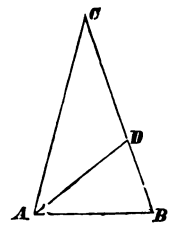
Beweis. Man hat $AB = DG = a$; bezeichnet man AD mit x, so ist $AG = x + a$. Durch Einsetzen dieser Werte in die aus § 52b) sich ergebende Gleichung $AB^2 = AD \,.\, AG$ erhält man $a^2 = x(x + a)$ oder $a^2 = x^2 + x \,.\, a$. Daraus folgt $x^2 = a^2 - x \,.\, a$ oder $x^2 = a(a - x)$.

d) Einen Kreis in 10 gleiche Teile zu teilen oder demselben ein regelmäfsiges Zehneck einzubeschreiben.

Auflösung. Wenn man den Radius stetig teilt, so kann man das gröfsere Stück 10mal als Sehne in den Kreis eintragen.

Beweis. Wenn ACB (Fig. 106) der Winkel der 10-Teilung (36^0) und AB die Zehneckseite ist, so sind die Winkel CAB und CBA beide gleich 72^0. Halbiert man den Winkel bei A durch die Gerade AD, so sind die Dreiecke BAD und ADC gleichschenklig und deshalb die Strecken AB, AD, DC einander gleich. Aufserdem sind die Dreiecke ABD und CBA ähnlich (§ 49a), und es gilt die Proportion: $BD : AB = BA : CB$. Bedenkt man, dafs $AB = CD$, so sieht man, dafs die Zehneckseite gleich dem gröfseren Stücke CD des in D stetig geteilten Radius ist. Nennt man $CB = r$ und $AB = s$, so hat man $r : s = s : r - s$.

Fig. 106.



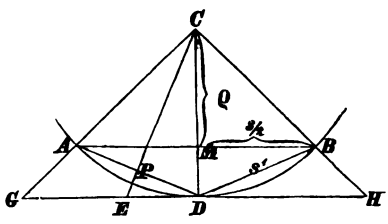
VII. Abschnitt.

Kreisberechnung.

§ 53. Aufgaben zur Berechnung regelmäfsiger Vielecke.

a) Der Radius ($CA = CB = CD = r$) eines Kreises sei gegeben und die Seite ($AB = s$) des einbeschriebenen n-Ecks bereits gefunden*). Man soll die Seite ($AD = BD = s'$) des einbeschriebenen $2n$-Ecks bestimmen.

Fig. 107.



Auflösung. Aus dem Dreiecke CBD bestimmt man die dem spitzen Winkel bei C gegenüberliegende Seite s' nach § 39

$$s'^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot \varrho = 2r^2 - 2r\varrho,$$

$$s' = \sqrt{2r\,(r - \varrho)}.$$

Hierin setzt man aus Dreieck CMB den Wert $\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}$ für ϱ ein:

$$s' = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}\right)}.$$

b) Der Radius r eines Kreises sei gegeben und die Seite s' des einbeschriebenen $2n$-Ecks gefunden. Man soll die Seite des n-Ecks daraus bestimmen.

Auflösung**). Nennen wir die Höhe CP des Dreiecks ACD (den kleinen Radius des $2n$-Ecks) mit ϱ', so kann der doppelte Inhalt des Dreiecks ACD einerseits durch $AD \,.\, CP$ oder $s' \,.\, \varrho'$, andererseits aber auch durch $CD \,.\, AM$ oder $r \cdot \frac{s}{2}$ ausgedrückt werden. Setzt man nun noch für ϱ' aus dem Dreieck CAP seinen Wert $\sqrt{r^2 - \frac{s'^2}{4}}$, so hat man durch Gleichsetzung jener Flächen:

$$r \cdot \frac{s}{2} = s' \cdot \sqrt{r^2 - \frac{s'^2}{4}}$$

*) Siehe Übungen 1 und 5 in § 10 der Übungen.

**) s kann auch durch Auflösung der Schlufsgleichung in a) nach s gefunden werden.

oder

$$s = \frac{2s'}{r} \cdot \sqrt{r^2 - \frac{s'^2}{4}}.$$

c) Der Radius r eines Kreises sei gegeben und die Seite s des einbeschriebenen n-Ecks bekannt. Man soll die Seite S des umbeschriebenen n-Ecks finden (in Fig. 107 $GH = S$).

Auflösung. Nach § 41, c hat man

$$GH : AB = CD : CM$$

oder

$$S : s = r : \varrho.$$

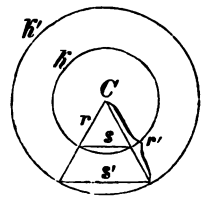
Durch Auflösen nach S und Einsetzen des Wertes für ϱ erhält man:

$$S = \frac{r \cdot s}{\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}}.$$

Die Peripherie des Kreises. § 54.

a) Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie ihre Radien. Wenn die Peripherie eines Kreises mit dem Durchmesser 1 durch π bezeichnet wird, so ist die Peripherie eines Kreises mit dem Durchmesser d durch $\pi \cdot d$ oder $\pi \cdot 2r$ ausgedrückt.

Fig. 108.



Beweis. Man denke durch den gemeinsamen Mittelpunkt der Kreise k, k', n Strahlen gezogen, welche den Winkelraum um C in gleiche Teile teilen. Dadurch entstehen (§ 32 a) auf den Kreisen die Ecken zweier regelmäfsigen n-Ecke, von welchen s und s' zwei Seiten sind. Nach § 41 c verhalten sich diese Seiten wie die Radien r und r'. Aber die Umringe der Vielecke sind das n-fache dieser Seiten, also verhalten auch sie sich wie $r : r'$. Das Gleiche mufs aber für die Peripherien der Kreise selbst gelten, denn wenn der Wert von n bis ins Unbegrenzte wächst, so gehen die Umringe der beiden Vielecke in die Peripherien der Kreise über (§ 33 b).

b) Die Fläche des Kreises ist gleich der Hälfte des Produktes von Peripherie und Radius oder $\pi \cdot r^2$.

Wenn man von einem regelmäfsigen umbeschriebenen Vieleck durch unbegrenzte Vermehrung der Seitenzahl zum Kreise übergeht, so wird der kleine Radius des Vielecks zum Radius des

Kreises und der Satz c) des § 36 geht in die zu beweisende Behauptung über.

Da aber die Peripherie des Kreises den Wert $2\pi r$ hat, so erhält man für die Fläche $2\pi r \frac{r}{2} = \pi r^2$.

c) Zwischen den Schenkeln eines Mittelpunktswinkels von α Grad liegt ein Bogen von der Länge $\frac{\pi r \alpha}{180}$ und ein Stück der Kreisfläche (Sektor) von dem Inhalt $\frac{\pi r^2 \alpha}{360}$.

Beweis. Zu dem Mittelpunktswinkel von 360^0 (als Bogen betrachtet) gehört die ganze Peripherie $2\pi r$ und (als Sektor betrachtet) die ganze Kreisfläche πr^2. Zu dem Winkel von einem Grad gehört daher der Bogen $\frac{2\pi r}{360}$ und der Sektor $\frac{\pi r^2}{360}$. Zu dem Winkel von α Grad gehört aber der Bogen $\alpha \cdot \frac{2\pi r}{360} = \frac{\pi r \alpha}{180}$ und der Sektor $\alpha \cdot \frac{\pi r^2}{360} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$.

Anmerkung. Die Berechnung desjenigen Flächenstückes, welches von dem Kreise durch eine Sehne abgeschnitten wird, (Segment) kann allgemein nur mit trigonometrischen Hilfsmitteln ausgeführt werden.

§ 55. Berechnung von π.

π ist die Hälfte von der Peripherie eines Kreises, dessen Radius 1 ist. Um π zu berechnen, gehe man von dem halben Umring u des einbeschriebenen regelmäfsigen Sechsecks aus, welcher den Wert 3 hat. Hierauf rechne man nach § 53 c den halben Umring U des umbeschriebenen regelmäfsigen Sechsecks, welcher 3,464 ... beträgt. Bei fortwährender Verdoppelung der Seitenzahl, also beim Übergange zum 12-Eck, 24-Eck, ... wird der Umring des einbeschriebenen Vielecks immer gröfser und der des umbeschriebenen Vielecks wird immer kleiner*). Nach § 33 b müssen diese beiden Werte U und u für einen unendlich grofsen Wert von n mit dem halben Umring des Kreises übereinstimmen.

---

*) Beim einbeschriebenen Vieleck wird eine Seite s des n-Ecks durch zwei Seiten des $2n$-Ecks ersetzt, welche nach § 19 a, Folg. zusammen gröfser sind als s. Beim umbeschriebenen Vieleck dagegen wird eine Seite s' des $2n$-Ecks zwischen zwei Seiten des n-Ecks eingeschaltet, und diese Seite s' ist nach § 19 a, Folg. kleiner, als die Summe der durch sie abgeschnittenen Stücke der beiden Seiten des n-Ecks, zwischen welche sie eingelegt wurde.

Es folgt noch eine Tabelle mit 5 Rubriken.

Die Überschriften n, ϱ, U, u, d bezeichnen nacheinander die Seitenzahl der regelmäfsigen Vielecke, den kleinen Radius des einbeschriebenen Vielecks, den halben Umring des umbeschriebenen, den halben Umring des einbeschriebenen Vielecks und die Differenz dieser halben Umringe.

n	ϱ	U	u	d
6	0,866025	3,464101	3,000000	0,464101
12	0,965926	3,215390	3,105828	0,109562
24	0,991445	3,159660	3,132628	0,027032
48	0,997859	3,146086	3,139350	0,006736
96	0,999464	3,142714	3,141032	0,001682

VIII. Abschnitt.

Hilfssätze aus der Arithmetik.

Das Messen der Gröfsen. § 56.

Eine Gröfse a mit einer gleichartigen Gröfse b messen, heifst zusehen, wie oft die Gröfse b (die Einheit) oder ein Bruchteil von b in a aufgeht.

Durch das Messen wird die sogenannte Mafszahl der Gröfse a für die Einheit b gefunden. Die Mafszahl der Gröfse a für die Einheit b ist diejenige Zahl, mit welcher man b multiplicieren mufs, um a zu erhalten.

Dabei sind 3 Fälle zu unterscheiden.

1) Die Einheit b geht $m$mal in a auf (m eine ganze Zahl). Dann ist $a = m \,.\, b$, oder $a = m$mal der Einheit, d. h. die Mafszahl von a ist die ganze Zahl m.

2) Der s^{te} Teil von b geht $r$mal in a auf (r und s sind ganze Zahlen). Dann ist $a = \frac{r}{s} \cdot b$ oder $a = \frac{r}{s}$mal der Einheit; die Mafszahl von a ist der Bruch $\frac{r}{s}$.

3) Es kann kein Teil von b gefunden werden, der eine ganze Anzahl mal in a aufgeht. Wir nehmen an, der s^{te} Teil von b gebe $r$mal genommen noch weniger als a, dagegen $r + 1$mal genommen mehr als a, so dafs

$$\frac{r}{s} \cdot b < a < \frac{r+1}{s} \cdot b.$$

Dann ist die zu suchende Maſszahl gröſser als $\frac{r}{s}$ und kleiner als $\frac{r+1}{s}$ (die Differenz beider Maſszahlen ist $\frac{1}{s}$), und der Fehler, welchen man durch die Annahme dieser beiden Maſszahlen begeht, ist kleiner als $\frac{b}{s}$.

Man kann nun s so groſs nehmen, daſs sowohl die Differenz $\frac{1}{s}$ beider Maſszahlen als auch der gemachte Fehler kleiner ist als jede noch so klein angegebene Zahl. Man sagt in diesem Falle, die gesuchte Maſszahl sei nicht durch einen Bruch angebbar, sei eine „Irrationalzahl", der man durch Brüche mit groſsen Nennern so nahe kommen könne als man will. Die Gröſsen a und b heiſsen in diesem Falle incommensurabel.

§ 57. Das Verhältnis gleichartiger Gröſsen.

a) Das Verhältnis der gleichartigen Gröſsen a und b ist diejenige Zahl, mit welcher man b multiplicieren muſs, um a zu erhalten.

Das Verhältnis $a : b$ ist also (§ 56) die Maſszahl von a für den Fall, daſs b als Einheit gewählt wird. Das Verhältnis $a : b$ ist demnach eine ganze Zahl oder ein Bruch oder eine Irrationalzahl, je nachdem der Fall 1) oder 2) oder 3) in § 56 eintritt.

Nehmen wir die ganzen Zahlen als Brüche mit dem Nenner 1 und die Irrationalzahlen als Grenzwerte von Brüchen, so kann ein Verhältnis immer als Bruch betrachtet werden.

§ 58. Die Proportionen.

Eine Proportion ist die Gleichung zweier Verhältnisse oder Brüche.

$$r : s = p : q$$

oder

$$\frac{r}{s} = \frac{p}{q}.$$

Anmerkung. Durch die Sätze über Gleichungen beweist man:

1) In jeder Proportion kann man die innern oder die äuſsern Glieder vertauschen.

2) Das Produkt der innern Glieder ist gleich dem Produkte der äuſsern.

3) Ein äuſseres (inneres) Glied wird gefunden, indem man die beiden innern (äuſsern) Glieder multipliciert und durch das bekannte äuſsere (innere) teilt.

4) Aus der Gleichung zweier Produkte kann man eine Proportion bilden, indem man die Faktoren des einen Produkts zu innern, die des andern zu äufsern Gliedern macht.

Ersetzung der Proportionen durch Gleichungen, welche einen Proportionalitätsfaktor enthalten. § 59.

a) Wenn m und n noch unbestimmte ganze, gebrochene oder irrationale Zahlen vorstellen, so kann man die Proportion $r : s = p : q$ ersetzen

1) durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} r &= m \,.\, s \\ p &= m \,.\, q \end{aligned}\right\}, \qquad 1)$$

2) durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} r &= n \,.\, p \\ s &= n \,.\, q \end{aligned}\right\}. \qquad 2)$$

Beweis. 1) Setzt man $r : s = m$, so ist auch $p : q = m$. Durch Wegschaffen des Nenners erhält man die Gleichungen 1).

2) Man vertausche die mittlern Glieder, um $r : p = s : q$ zu erhalten. Alsdann setze man $\frac{r}{p} = n$, so mufs auch $\frac{s}{q} = n$ richtig sein. Durch Fortschaffen des Nenners erhält man die Gleichungen 2).

b) Die Gleichungen

$$r : s = p : q = u : v \qquad 3)$$

zwischen mehr als zwei Verhältnissen enthalten mehr als zwei Proportionen:

$$\begin{aligned} r : s &= p : q \\ r : s &= u : v \\ p : q &= u : v. \end{aligned} \qquad 4)$$

Durch Vertauschung der mittlern Glieder erhält man die Proportionen:

$$\begin{aligned} r : p &= s : q \\ r : u &= s : v \\ p : u &= q : v, \end{aligned} \qquad 5)$$

welche wieder in einer Zeile zu schreiben sind:

$$r : p : u \ldots = s : q : v. \qquad 6)$$

Setzt man nun $r : s = m$, so ist auch $p : q = m$ u. s. w., und man hat durch Wegschaffen der Nenner:

$$r = m \,.\, s; \quad p = m \,.\, q; \quad u = m \,.\, v,$$

wodurch die Proportionen 3) oder 6) vollständig ersetzt sind.

§ 60. Proportionalitätssatz.

b) Jeder beliebigen Gröfse a, b, c . . . einer Art soll eine einzige Gröfse a', b', c' einer andern Art bezüglich entsprechen. Dieses Entsprechen soll folgenden Bedingungen unterworfen sein:

I. Wenn die Gröfsen a und b einander gleich sind, so sind auch die entsprechenden Gröfsen a' und b' einander gleich.

II. Der Summe s zweier Gröfsen a und b entspricht die Summe s' der zugehörigen Gröfsen a' und b'.

Unter diesen Voraussetzungen behaupten wir: Zwei Gröfsen a und b der ersten Art verhalten sich wie die entsprechenden Gröfsen der andern Art, d. h. $a : b = a' : b'$.

Beweis. Aus I und II folgt: Wenn der Gröfse b der ersten Art die Gröfse b' der zweiten Art entspricht, so entspricht

1) dem $m$fachen von b das $m$fache von b'; denn der Summe von m gleichen Summanden b mufs die Summe von m gleichen Summanden b' entsprechen (nach II);

2) entspricht dem s^{ten} Teile von b auch der s^{te} Teil von b', denn einer Gröfse, welche $s$mal als Summand genommen b giebt, mufs die Gröfse entsprechen, welche $s$mal als Summand genommen b' giebt.

Mit Hilfe von 1) und 2) führen wir den Beweis mit Unterscheidung zweier Fälle.

Erster Fall. $a : b = \frac{r}{s}$ (r und s ganze Zahlen; s kann auch gleich 1 sein). Wenn $a : b = \frac{r}{s}$, so ist auch

$$a = \frac{r}{s} \cdot b = r \cdot \frac{b}{s}.$$

Nun entspricht nach 2) der Gröfse $\frac{b}{s}$ die Gröfse $\frac{b'}{s}$ und nach 1) entspricht der Gröfse $r \cdot \left(\frac{b}{s}\right)$ die Gröfse $r \cdot \left(\frac{b'}{s}\right)$. Also hat man $a' = r \cdot \frac{b'}{s} = \frac{r}{s} \cdot b'$ oder $a' : b' = \frac{r}{s}$. Die Verhältnisse $a : b$ und $a' : b'$ sind gleich, weil sie beide den Wert $\frac{r}{s}$ haben.

Zweiter Fall. a und b seien inkommensurabel. Man kann das gesuchte Verhältnis $a : b$ zwischen den Grenzen $\frac{r}{s}$ und $\frac{r+1}{s}$ einschliefsen (§ 56). Dann hat man die aufsteigende Reihe

$$\frac{r}{s} \cdot b < a < \frac{r+1}{s} \cdot b.$$

Diesen Gröfsen entsprechen in ebenfalls aufsteigender Reihe (siehe die Anmerkung):

$$\frac{r}{s} \cdot b' < a' < \frac{r+1}{s} \cdot b'.$$

Hieraus schliefst man (§ 56), dafs auch das Verhältnis $a' : b'$ zwischen den Grenzen $\frac{r}{s}$ und $\frac{r+1}{s}$ liegt.

Wenn aber die Verhältnisse $a : b$ und $a' : b'$ für beliebig wachsende Werte von s zwischen diesen Grenzen liegen, so sind sie einander gleich (§ 56, 3).

Anmerkung. Aus II. folgt, dafs wenn eine Gröfse der einen Art wächst, die entsprechende Gröfse der zweiten Art auch wachsen mufs.

222786B

Übungen.

Mit zwei lithographierten Tafeln.

Übungen zu Abschnitt I (die Grundgebilde)*). § 1.

1) α) Sind Nebenwinkel immer supplementär? Sind Supplementwinkel immer auch Nebenwinkel?

β) Nebenwinkel (Supplementwinkel) von gleichen Winkeln sind gleich.

2) Welches sind die Supplementwinkel zu 30^0, 45^0, 90^0, 120^0, $44^0\ 20'\ 31''$, $90^0\ 3'\ 20''$, $120^0\ 15'\ 30''$?

3) Komplementwinkel von gleichen Winkeln sind auch gleich.

4) Welches sind die Komplementwinkel zu 15^0, 30^0, 45^0, 60^0, $10^0\ 20'\ 30''$, $30^0\ 44'\ 54''$, $70^0\ 13'\ 24''$?

5) Von zwei Nebenwinkeln ist der eine doppelt so grofs als der andere ($\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ vom andern); wie grofs ist jeder?

6) Von zwei Nebenwinkeln ist der eine um 20^0 (30^0, 40^0, $30'$, x^0) gröfser als der andere; wie grofs ist jeder?

7) Winkel BMC in Fig. 1 auf Seite 1 betrage 55^0 (x^0); wie grofs sind die übrigen Winkel der Figur?

Nimm an, dafs die Halbierungslinie von BMC gezogen und nach rückwärts verlängert sei. Bestimme ebenfalls alle Winkel der Figur. Folgere, dafs die Rückverlängerung den Winkel AMD halbiert.

7 α) $\sphericalangle CMB$ in Fig. 1 auf Seite 1 betrage 60^0 (x^0); $\sphericalangle CMB$ und sein Scheitelwinkel seien halbiert. Bestimme die Winkel der Figur und folgere, dafs die beiden Halbierungslinien in eine Gerade fallen.

8) Von einem Punkte gehen vier Richtungen aus. Zwei der entstandenen Winkel, welche nicht benachbart sind, mögen 35^0 (x^0)

---

*) Die Anführungen von Paragraphen des „Leitfadens I. Teil" und solchen der „Übungen zum I. Teil des Leitfadens" unterscheiden sich zum Teil von selbst durch die angehängten Buchstaben oder Zahlen. Z. B. § 6 a bezieht sich auf den Leitfaden, § 2, Üb. 3 auf die Übungen. Wo es dagegen nötig scheint, findet sich bei dem Hinweis auf den Leitfaden der ebenen Geometrie der Buchstabe G. vorausgesetzt. Wenn auf Figuren im Texte des Leitfadens hingewiesen wird, so ist die Seitenzahl dabeigesetzt. Anführungen von Figuren ohne Seitenzahl beziehen sich auf die Tafeln, welche diesen Übungen beigegeben sind.

betragen. Die übrigen beiden Winkel seien gleich und sollen bestimmt werden. Folgere, dafs je zwei jener Richtungen in eine Gerade fallen.

9) Der eine von zwei Nebenwinkeln betrage 26^0 (x^0). Beide Nebenwinkel seien halbiert. Bestimme die Winkel der Figur und folgere, dafs die Halbierungslinien aufeinander senkrecht stehen.

10) α) Alle Punkte der Symmetrieachse a (Fig. 5 auf Seite 3) entsprechen sich selbst.

β) Alle Geraden, welche auf der Symmetrieachse a senkrecht stehen, entsprechen sich selbst.

11) Die Figur, welche aus zwei auf einander senkrechten Geraden besteht, ist für jede dieser Geraden symmetrisch.

12) Die Figur 8 auf Seite 5, welche aus zwei sich schneidenden Geraden besteht, ist symmetrisch für jede der beiden Geraden, welche einen Winkel und den zugehörigen Scheitelwinkel halbiert. (Zwei zu einander senkrechte Symmetrieachsen.)

13) Wie leitet man aus 12 den Satz d) des § 5 ab? Andeutung. Zwei Scheitelwinkel sind durch die eine Symmetrieachse halbiert. Die Hälften entsprechen sich für die andere Symmetrieachse und sind gleich.

14) Alle durch A in Fig. 6 auf Seite 4 gehenden Strahlen entsprechen sich selbst.

15) Die Figuren in 11) und 12) sind symmetrisch für den Schnittpunkt der Geraden als Centrum. Wie leitet man aus dieser Bemerkung einen Beweis des Satzes über Scheitelwinkel her?

16) α) Zwei Gerade, die auf einer dritten senkrecht stehen, sind parallel.

β) Wenn von zwei parallelen Geraden die eine auf einer dritten Geraden senkrecht steht, so thut es auch die andere.

17) In § 6 α) wurde bewiesen, dafs zwei verschiedene Richtungen sich für die Halbierungslinie ihres Winkels symmetrisch entsprechen. Man beweise nun, dafs zwei Parallelen b, b' sich für die Halbierungslinie des eingeschlossenen Streifens entsprechen. Andeutung. Man schneide b und b' (Fig. 1) durch eine zu beiden senkrechte Gerade (Üb. 16 β) in den Punkten B und B', halbiere BB' in A und ziehe a zu BB' senkrecht, somit parallel zu b und b' (Üb. 16 α). Durch das Umklappen um a vertauschen B und B', sowie die rechten Winkel β und β' ihre Stelle. Also entsprechen sich b und b' für die Achse a. Jede zur Achse senkrechte Gerade schneidet b und b' in entsprechenden Punkten C und C', so dafs D die Mitte von CC' ist. Deshalb heifst die Gerade a die Halbierungslinie des Streifens bb'.

18) Man beweise auch, dafs eine Symmetrieachse von b und b' keine andere Linie als die Halbierungslinie des Streifens bb'

sein kann. Andeutung. Wenn die Achse a von b getroffen würde, so müfste sie nach dem Beweis zu § 6 α) von der entsprechenden Geraden in demselben Punkte getroffen werden, was unmöglich ist, weil $b \parallel b'$. Also mufs a mit b und b' parallel sein. Zieht man aber eine zu a, b, b' senkrechte Gerade, welche sich selbst entspricht und die Schnittpunkte A, B, B' liefert, so müssen B und B' entsprechende Punkte sein. AB und AB' müssen folglich als entsprechende Strecken gleich sein.

19) a (Fig. 2) sei die Symmetrieachse (Halbierungslinie) des von den Parallelen b und b' gebildeten Streifens. Man beweise, dafs jede in den Streifen gelegte Strecke CC' von a in ihrem Mittelpunkte A getroffen wird. Andeutung. Ziehe durch den Schnittpunkt A die Gerade BB' senkrecht auf a. B und B' entsprechen sich für die Achse a. b und b' entsprechen sich nun auch für A als Mittelpunkt, und die Gerade CC' entspricht sich selbst für diesen Mittelpunkt. Folglich sind C und C' entsprechend für A und $AC = AC'$.

20) Die Symmetrieachse a (Fig. 3) und zwei entsprechende Punkte B, B' seien gegeben. Man soll zu einem weitern Punkte C den entsprechenden mit dem Lineal allein konstruieren. Andeutung. Ziehe CB und CB', um die Punkte A und E zu erhalten. Wie nun C der Schnittpunkt von AB und EB' ist, so ist der gesuchte Punkt C' Schnittpunkt der homologen Geraden AB' und EB.

21) Unter den Voraussetzungen von 20) soll man zu einer gegebenen Geraden b die entsprechende mit dem Lineal allein konstruieren. Andeutung. Man konstruiere zu zwei Punkten von b die homologen Punkte nach 20). Als den einen dieser Punkte kann man auch den Schnittpunkt von b mit der Achse nehmen.

22) Das Centrum A (Fig. 4) der Symmetrie und zwei entsprechende Geraden b, b' sind gegeben. Man soll zu einer weitern Geraden c die entsprechende mit dem Lineal allein finden. Andeutung. Man bestimme durch die Geraden MA und NA (Fig. 4) die Punkte M' und N', welche jenen bezüglich entsprechen. $M'N'$ ist die gesuchte Gerade.

23) Unter den Voraussetzungen von 22) soll man zu einem beliebigen Punkte P den entsprechenden suchen. Andeutung. Man suche zu zwei durch P gezogenen Geraden die homologen Geraden nach 22) und erhält den gesuchten Punkt als ihren Schnittpunkt. Der Einfachheit halber kann man eine dieser Geraden durch A ziehen.

---

§ 2. Übungen zu Abschnitt II (allgemeine Eigenschaften der Figuren).

Man soll

1) für die Figur 22 auf Seite 10, ohne die Zeichnung anzusehen, auf alle möglichen Weisen nennen: α) Zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, β) eine Seite und die anliegenden Winkel, γ) zwei Seiten und den Gegenwinkel der einen, δ) zwei Winkel und die Gegenseite des einen. Andeutung. α) ab und γ oder bc und α u. s. w.

2) Umgekehrt soll man drei beliebige unter den Buchstaben der Figur 22 auf Seite 10 nennen und die Lage der Stücke angeben, ohne auf die Zeichnung zu sehen.

3) Bei der Stellung von Aufgaben über die Konstruktion von Dreiecken werden folgende Bezeichnungen benützt werden:

Die Senkrechten, welche von A, B, C bezüglich auf die gegenüberliegenden Seiten a, b, c gefällt werden können, heifsen „Höhen" des Dreiecks und werden der Reihe nach mit h', h'', h''' bezeichnet. Mit h' bezeichnet man auch zugleich die Länge der Strecke, welche von A bis zum Fufspunkte der Höhe h' reicht. Wenn man eine einzige dieser Höhen, z. B. h''' in Betrachtung zieht, so nennt man die zugehörige Seite c des Dreiecks die „Grundlinie". Die beiden Abschnitte PA und PB (Fig. 5), welche die Höhe h''' auf der Seite c erzeugt, werden mit q''' und p''' bezeichnet; p''' ist die „Projektion" der Seite a auf c und q''' ist die Projektion von b auf c. Die Bezeichnung ist auf diese Weise der alphabetischen Reihenfolge entsprechend; denn p''', q''' gehören der Reihe nach zu a, b. Was werden nun die Bezeichnungen p', q', p'', q'' bedeuten? Bemerke auch, dafs je zwei der Abschnitte p', p'', p''' durch einen der Abschnitte q', q'', q''' getrennt sind. Die Strecken, welche auf den Halbierungslinien der Winkel α, β, γ von einem Eckpunkte des Dreiecks bis zu ihrem Schnittpunkte mit der gegenüberliegenden Seite reichen, heifsen w', w'', w'''. Die Winkelhalbierende w''' erzeugt auf AB die Abschnitte DA und DB (Fig. 56), welche v''' und u''' genannt werden. Was bedeuten nun u', u'', v', v''? Je zwei Abschnitte u sind durch einen Abschnitt v getrennt. Die Strecken, welche von den Ecken A, B, C bis zu den Mittelpunkten der Seiten a, b, c reichen, heifsen t', t'', t'''. Mittelpunkt und Radius heifsen M und r bei dem umbeschriebenen Kreise, O und ϱ bei dem einbeschriebenen Kreise, O''' und ϱ''' bei dem anbeschriebenen Kreise, welcher die Seite c innerhalb und die Seiten a, b in der Verlängerung berührt. Statt h''', p''', u''' schreibt man

oft nur h, p, u. $\sphericalangle tc$ bedeutet also einen Winkel zwischen t''' und c. c ist in dem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse. Ein Dreieck, in welchem zwei Seiten gleich sind, z. B. $a = b$, heifst gleichschenkliges Dreieck. Die Seite c wird als „Grundlinie" und C als „Spitze" bezeichnet. Die Ecken und Seiten des Vierecks werden bei den Übungen bezeichnet, wie Fig. 18 zeigt. Die Winkel des Vierecks bei A, B, C, D heifsen α, β, γ, δ; die Diagonalen AC und BD heifsen e und f. Der Schnittpunkt der Diagonalen heifst E, ein Winkel daselbst ε.

4) Eine Höhe des Dreiecks trifft entweder die Grundlinie selbst, oder nur ihre Verlängerung. Im ersten Falle sind die Winkel an der Grundlinie beide spitz, im zweiten Falle ist einer derselben stumpf. Andeutung. (Fig. 5.) Zwei in den Endpunkten der Grundlinie errichtete Senkrechte bestimmen einen Streifen. Die Höhe und daher auch der dritte Eckpunkt des Dreiecks fällt innerhalb oder aufserhalb des Streifens, je nachdem der erste oder zweite Fall in 4) eintritt. Alsdann zeigt die Anschauung, dafs im ersten Falle beide Winkel an der Grundlinie kleiner als ein rechter sind, während im zweiten Falle der eine dieser Winkel gröfser als ein rechter ist.

5) In G. § 3 traten noch keine geschlossenen Figuren als entsprechend auf. Nimmt man in Fig. 5 auf Seite 3 noch einen Punkt C der Achse hinzu, so entstehen Dreiecke ABC und $AB'C$ (Fig. 6), deren Ecken und Seiten sich paarweise entsprechen und welche durch Umklappen zur Deckung gebracht werden können.

6) In G. § 4 wurden noch keine geschlossenen Figuren betrachtet. Nimmt man in Fig. 6 auf Seite 4 noch eine sich selbst entsprechende Gerade (die durch A geht) hinzu, so entstehen Dreiseite abc und $a'bc$ (Fig. 7), deren Seiten und Ecken sich paarweise entsprechen, welche daher durch eine halbe Umdrehung zur Deckung gebracht werden können.

7) Man beobachte, dafs in den Dreiecken der Fig. 6 die entsprechenden Winkel entgegengesetzten Sinnes sind. (G. § 2 Anmerkung.)

8) Der Sinn eines Winkels ändert sich nur durch Umwenden desselben, nicht aber durch Verschieben und Drehen in der Ebene.

9) Der Sinn eines Dreiecks (§ 10, Anmerk.) ändert sich nur durch Umwenden desselben, nicht aber durch Verschieben und Drehen in der Ebene.

10) Dreiecke, welche sich decken, sind gleichen Sinnes. Dreiecke entgegengesetzten Sinnes (z. B. die Dreiecke in Fig. 6) können nie zur Deckung gebracht werden, ohne dafs man das eine umklappte.

11) Die Winkel der Dreiecke in Fig. 7 und die Dreiecke selbst sind gleichen Sinnes.

12) Man gebraucht oft noch eine andere Art, den Sinn entsprechender Dreiecke zu bestimmen: Man denke sich zwei Zuschauer, welche die Umringe der Dreiecke so durchlaufen, dafs sie sich gleichzeitig in entsprechenden Ecken befinden. Dreiecke sind auch gleichen Sinnes oder nicht, je nachdem die Zuschauer die Flächen der umgangenen Dreiecke auf der gleichen Seite (d. h. beidemal rechts oder beidemal links) liegen haben oder nicht.

13) Wie grofs sind die Winkel α, β, γ eines Dreiecks, wenn α) $\alpha = \beta = \gamma$; β) $\beta = \gamma$ und $\alpha = 36^0$; γ) $\beta = \gamma = \frac{\alpha}{2}$; δ) $\beta = \gamma = 2 \cdot \alpha$?

14) α) In Fig. 25 auf Seite 11 sei $\alpha = 70^0$, $\beta = 50^0$. Berechne alle Winkel der Figur; welcher der Winkel bei D ist der gröfsere?

β) In einem rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = 90^0$) sei die Höhe h gezogen (§ 2, Üb. 3). Der Winkel α betrage 32^0 (x^0); berechne die Winkel der Figur.

γ) In einem gleichschenkligen Dreieck (§ 2, Üb. 3) betrage ein Winkel an der Grundlinie 55^0 (x^0); berechne den Aufsenwinkel an der Spitze ($= 2x$).

δ) In einem Dreieck sei $t''' = c : 2$ und $\alpha = 48^0$ (x^0). Bestimme die übrigen Winkel der Figur.

ε) In dem gleichschenkligen Dreieck in Fig. 106 auf Seite 61 ist $\gamma = 36^0$ und AD ist die Halbierungslinie von α. Beweise, dafs die Dreiecke ADB und ADC gleichschenklig sind.

15) In einem Dreieck sei $\gamma = 66^0$ (x^0). Berechne $\alpha + \beta$, $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$ und zuletzt den Winkel AOB (Fig. 38 auf Seite 23), welchen w' und w'' mit einander bilden $\left(= 90 + \frac{x}{2}\right)$.

16) In dem gleichschenkligen Dreieck (§ 2, Üb. 3) ist die Halbierungslinie des Aufsenwinkels an der Spitze mit der Grundlinie parallel. Beweise auch die Umkehrung.

17) Beweise die letzte Behauptung in § 12 c auch für den Fall, dafs die schiefen Linien auf verschiedenen Seiten der Senkrechten liegen (durch Umklappen der einen Seite um die Senkrechte).

18) Beweise in Fig. 8, dafs $\sphericalangle ADB > ACB$.

19) Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck ein Winkel wächst, so wächst auch die gegenüberliegende Kathete und die anliegende Kathete nimmt ab. Andeutung. Wenn der Winkel γ (Fig. 9) gewachsen ist, so hat der Winkel α abgenommen. Man zeige, dafs AB' und CB sich notwendig schneiden müssen. Nun

ist Winkel $ABB' > 90^0$, folglich $c' > c$. Ebenso ist Winkel $CB'B > 90^0$, also $a > a'$.

20) Zwei Paare B, B' und C, C' (Fig. 10) von Punkten, die sich für die Achse a symmetrisch entsprechen, bestimmen ein symmetrisches vollständiges Viereck. Die Gegenseiten BC und $B'C'$ sind entsprechend und schneiden sich auf der Achse im Nebeneck D. Die Achse halbiert den Winkel BDB' dieser Gegenseiten. Dasselbe gilt für die Gegenseiten BC' und $B'C$. Jede der Gegenseiten BB' und CC' entspricht sich selbst. Das unendlich ferne Nebeneck entspricht sich ebenfalls selbst, da man jeder Geraden nur einen unendlich fernen Punkt zuschreibt. Die Abstände BB' und CC' werden von der Achse senkrecht halbiert.

21) Man betrachte das einfache symmetrische Viereck $CC'B'B$ in Fig. 10. Es hat die Seiten BB' und CC' parallel (§ 1, Üb. 16 α), während die Seiten CB und $C'B'$ im allgemeinen nicht parallel, aber gleich sind. Dies Viereck wird gleichschenkliges Trapez*) genannt. Man soll die Lage der Symmetrieachse a gegen die Stücke des Trapezes nach Üb. 20 angeben.

22) Zwei Paare, b, b' und c, c' (Fig. 11) von Geraden, die sich für die Achse a symmetrisch entsprechen, bestimmen ein symmetrisches vollständiges Vierseit. Die Gegenecken M und M' sind entsprechend, ihr Abstand wird von der Achse senkrecht halbiert. Die Diagonale MM' entspricht sich selbst. Das Gleiche gilt von den Gegenecken NN' und der sie verbindenden Diagonale. Jede der Gegenecken O und P entspricht sich selbst. Die Diagonale OP ist die Symmetrieachse und entspricht sich ebenfalls selbst. Die Winkel bei O und P werden von der Symmetrieachse halbiert.

23) Man betrachte das einfache Vierseit, welches die Seiten cc', bb' hat, und dessen Ecken M, P, M', O sind. Dies Vierseit hat zwei Paare OM, OM' und PM, PM' gleicher Nachbarseiten. Ein solches Viereck wird Deltoïd genannt.

Man soll die Lage der Symmetrieachse gegen die Stücke des Vierseits nach Üb. 22 angeben.

24) (Fig. 12.) Zwei Paare B, B' und C, C' von Punkten, die sich für das Centrum A symmetrisch entsprechen, bestimmen ein für A symmetrisches vollständiges Viereck. Die Gegenseiten BC und $B'C'$ entsprechen sich und führen auf ein unendlich weit entferntes Nebeneck (sind parallel, vgl. G. § 9). Dasselbe gilt von den Gegenseiten BC' und $B'C$. Jede der Gegenseiten BB' und CC' entspricht sich selbst. Das Nebeneck, in dem sie

*) Trapez heifst ein Viereck, welches zwei parallele und zwei konvergente Seiten hat.

sich schneiden, ist das Centrum der Symmetrie und entspricht sich selbst. Wie kann man auch die unendlich fernen Nebenecken als sich selbst entsprechend ansehen?*) Die Abstände BB' und CC' werden durch A halbiert.

25) Man betrachte das für A symmetrische einfache Viereck $BCB'C'$ (Fig. 12). Es hat die Seiten BC und $B'C'$, sowie BC' und $B'C$ parallel (§ 8 c). Das Viereck wird Parallelogramm genannt (G. § 28). Man soll nach Üb. 24 die Lage des Centrums A gegen die Stücke des Vierecks angeben.

26) Zwei Paare b, b' und c, c' von Geraden, welche sich für das Centrum A symmetrisch entsprechen (Fig. 13), bestimmen ein für A symmetrisches vollständiges Vierseit.

Die Gegenpunkte M und M' entsprechen sich. Der Abstand MM' wird von A halbiert. Das Gleiche gilt von den Gegenpunkten N, N'. Aufserdem sind noch zwei unendlich ferne Gegenpunkte vorhanden. Sie entsprechen sich selbst. Die Diagonalen MM' und NN' des vollständigen Vierseits entsprechen sich selbst. Die Lage der dritten Diagonale ist nicht anzugeben, denn sie enthält zwei unendlich ferne Punkte, während jede Gerade von angebbarer Lage nach unserer Anschauung nur einen unendlich fernen Punkt enthält**). Jede durch A in das Vierseit eingelegte Strecke PP' hat in A ihren Mittelpunkt.

27) Man betrachte das einfache Vierseit in Fig. 13, dessen Seiten b, b', c, c' und dessen Ecken M, M', N, N' sind. Es ist mit dem in Übung 25***) betrachteten Viereck identisch

---

*) Anmerkung. Jeder unendlich ferne Punkt entspricht sich selbst für das Centrum C. — Aus stereometrischen Gründen (Abbildung einer Ebene auf eine andere durch die Perspektive — Horizontlinie — Fluchtpunkte) sieht man die Gesamtheit der unendlich fernen Punkte einer Ebene als Punkte einer Geraden an (unendlich ferne Gerade). Für das Centrum A entsprechen sich die Strahlen des Büschels A und die Punkte der unendlich fernen Geraden selbst. Für eine Achse a entsprechen sich die Punkte der Achse und die zu a senkrechten Strahlen selbst. Diese Strahlen können als Strahlen eines Büschels mit unendlich fernem Scheitel betrachtet werden. Die achsiale und die centrische Symmetrie sind besondere Fälle der sogenannten involutorischen Verwandtschaft. In dieser letzteren ist ein Centrum A und eine Axe a vorhanden. Die Strahlen des Büschels A und die Punkte der Achse a entsprechen sich selbst. Rückt der Punkt A in unendliche Ferne, so entsteht die achsiale Symmetrie. Rückt die Achse a in unendliche Ferne, so entsteht die centrische Symmetrie.

**) Anmerkung. Es ist die sich selbst entsprechende unendlich ferne Gerade (siehe die Anmerkung zu Übung 24).

***) Anmerkung. Bei der achsialen Symmetrie haben wir als symmetrisches einfaches Viereck (gleichschenkliges Trapez) und symmetrisch einfaches Vierseit (Deltoïd) verschiedenartige Figuren erhalten. Dies ist bei der centrischen Symmetrie nicht der Fall, weil wir die

(Parallelogramm). Man gebe nach Übung 26 die Lage des Punktes A gegen die Stücke der Figur an.

28) Von einem einfachen Vieleck sei bekannt, dafs seine Winkel gleich sind. Wie grofs sind diese Winkel, wenn das Vieleck 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 Seiten hat? Andeutung. Berechne zuerst die gemeinsame Gröfse der Aufsenwinkel $(360^0 : n)$ und die Vieleckswinkel als deren Supplemente.

29) α) In einem Viereck sei $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ (siehe § 2, Üb. 3). Berechne die Winkel, wenn $\alpha = 60^0\,(x^0)$. Beweise, dafs $a \parallel c$ und $b \parallel d$.

β) In einem Viereck ist $\alpha = \beta$ und $\gamma = \delta$. Berechne die Winkel, wenn $\alpha = 54^0\,(x^0)$. Beweise, dafs $a \parallel c$. Wieviel Grad mufs α haben, damit auch b und d parallel seien?

γ) In einem Viereck sei $\alpha = 110^0$ und β doppelt so grofs als δ. Die Diagonale BD halbiere die Winkel β und δ. Man berechne alle Winkel der Figur.

30) In einem Viereck seien je zwei Gegenseiten parallel. Berechne die Winkel, wenn $\alpha = 40^0\,(90^0, x^0)$.

31) α) Alle Kreise, welche durch einen Punkt A gehen und den Mittelpunkt auf einer Geraden b haben, gehen noch durch einen zweiten Punkt A'.

β) Alle Kreise, welche eine Gerade a berühren und den Mittelpunkt auf einer andern Geraden b haben, berühren noch eine andere Gerade a' (Symmetrie des Kreises für jeden Durchmesser).

32) An einen Kreis eine Tangente zu legen, welche α) mit einer gegebenen Geraden a parallel ist, β) mit einer gegebenen Geraden einen bestimmten Winkel β bildet.

γ) Mit gegebenem Radius r einen Kreis beschreiben, welcher eine Gerade a in einem bestimmten Punkte A berührt.

33) Es giebt nur einen Kreis, welcher durch zwei Punkte A und B geht und in A die Gerade a berührt. Andeutung. Der Mittelpunkt eines solchen Kreises mufs der in A auf a errichteten Senkrechten und der Mittelsenkrechten von AB angehören (§ 20, a und c). Zeige, dafs der Schnittpunkt dieser Linien wirklich Mittelpunkt eine solchen Kreises ist.

34) Es giebt zwei Kreise, welche die Geraden a und b berühren, wenn die Berührung von a in einem bestimmten Punkte A stattfinden soll.

---

einfachen Vierseite mit unendlich fernen Ecken von der Untersuchung ausschliefsen. Hätte man unter den einfachen Vierseiten, welche in dem für die Achse a symmetrischen Vierseit Fig. 11 enthalten sind, dasjenige mit den Ecken $MM'NN'$ gewählt, so würde die Figur auch mit dem einfachen symmetrischen Viereck (Trapez) identisch gewesen sein.

35) Den geometrischen Ort für die Mittelpunkte der Kreise zu bestimmen, welche, mit dem Radius r beschrieben, durch den Punkt A gehen.

36) α) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise c, welche den Kreis k in dem Punkte A berühren? Andeutung. Die Gerade, welche das Centrum von k mit A verbindet, ist nach § 17 b) die Centrale beider Kreise.

β) Welches ist der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, welcher mit dem gegebenen Halbmesser (Radius) h beschrieben ist und den Kreis a (Halbmesser r) von aufsen berührt? Andeutung. Ein Kreis, der mit dem Radius $r + h$ um den Mittelpunkt von a beschrieben ist.

γ) Wie heifst die Antwort zu β), wenn die Berührung von innen stattfinden soll?

δ) Einen Kreis zu zeichnen, welcher, mit dem Radius h beschrieben, zwei Kreise a und b von den Radien r und r' berührt, wenn

1) a von aufsen und b von innen,
2) a von innen und b von aufsen,
3) a und b von aufsen,
4) a und b von innen

berührt werden sollen.

37) α) Jeder Kreis c, der den Kreis k in A berührt, wird in demselben Punkte die Tangente a des Kreises k berühren und umgekehrt.

38) α) Einen Kreis c zu zeichnen, welcher den Kreis k in A berührt und aufserdem durch den Punkt B geht.

β) Einen Kreis zu zeichnen, welcher den Kreis k in dem Punkte A und aufserdem noch eine Gerade b berührt. Andeutung. Siehe Übung 37.

39) Die Figur zweier Kreise und ihrer gemeinschaftlichen Tangenten ist symmetrisch für die Centrale beider Kreise.

40) An zwei Kreise die äufsern gemeinschaftlichen Tangenten (diejenigen, bei welchen die Kreise auf derselben Seite liegen) zu legen. Andeutung. Man ziehe mit der Differenz der Radien um den Mittelpunkt des gröfseren Kreises einen neuen Kreis und lege durch den Mittelpunkt des kleinern Kreises Tangenten an denselben.

41) An zwei Kreise die innern gemeinschaftlichen Tangenten zu zeichnen. (Verwende die Summe der beiden Radien.)

42) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise von gleichen Radien berühren? (§ 20 a.)

43) Einen Kreis c zu konstruieren, welcher zwei Kreise k

und k' von gleichen Radien, und zwar den einen k in einem bestimmten Punkte A berührt. (Übung 36 α und 42.)

44) Einen Kreis c zu konstruieren, welcher die Gerade a in einem bestimmten Punkte A und aufserdem einen Kreis k' berührt. Andeutung. Ersetze a durch einen Kreis k, welcher mit k' gleichen Radius hat und die Gerade a in A berührt. Ein Kreis c, welcher k in A berührt, wird dann von selbst auch die Gerade a in diesem Punkte berühren. (2 Lösungen, weil der Kreis k auf beiden Seiten der Geraden angenommen werden kann.)

45) Einen Kreis c zu konstruieren, welcher zwei beliebige Kreise k und k', und zwar den ersten in einem bestimmten Punkte A berührt. Andeutung. Ersetze wieder den Kreis k durch einen andern, welcher k in A berührt. (Zwei Lösungen.)

46) α) Wenn in einem Viereck $a = b$ und $c = d$, so wird es durch die Diagonale BD in zwei kongruente Dreiecke geteilt. Folgere, dafs BD die Winkel β und δ halbiert und dafs $\alpha = \gamma$.

β) Wenn in einem Dreieck $a = b$, so wird dasselbe durch t''' in zwei kongruente Dreiecke geteilt. Folgere, dafs γ durch t''' halbiert wird, dafs $\alpha = \beta$ und dafs t''' mit c gleiche (rechte) Winkel bildet.

γ) Wenn in einem Viereck $a = c$ und $b = d$, so wird es durch jede Diagonale in zwei kongruente Dreiecke geteilt. Folgere, dafs die Diagonale AC mit a und c gleiche Winkel bildet. Folgere hieraus wiederum, dafs $a \parallel c$. Beweise auf entsprechende Weise, dafs $b \parallel d$.

47) α) Ein Viereck wird durch die Diagonalen in vier Dreiecke geteilt. Wenn die Diagonalen einander halbieren, so sind diese Dreiecke paarweise kongruent. Folgere daraus, dafs AC mit a und c gleiche Winkel bildet und dafs $a \parallel c$. Beweise auch, dafs $b \parallel d$.

β) Wenn in einem Dreieck t''' auf c senkrecht steht, so wird es durch diese Linien in zwei kongruente Dreiecke geteilt. Folgere, dafs $a = b$, $\alpha = \beta$.

γ) In einem Dreieck sei $a = b$. Die Halbierungslinie von γ teilt das Dreieck in zwei kongruente Dreiecke. Folgere, dafs diese Halbierungslinie die Seite c in der Mitte trifft.

48) α) Wenn in einem Dreieck $a = b$, so wird dasselbe durch die Höhe h''' in zwei kongruente Dreiecke geteilt.

β) Wenn in einem Viereck $a = d$ und $\beta = \delta = 90^0$, so wird dasselbe durch die Diagonale AC in zwei kongruente Dreiecke geteilt.

γ) In einem Dreieck sei $a = b$ und infolge dessen $\alpha = \beta$ nach § 12 b. Verbinde C mit einem Punkte D von AB, welcher nicht in der Mitte von AB liegt. Die Dreiecke haben drei

Stücke entsprechend gleich: $a = b$, $\alpha = \beta$, $CD = CD$. Trotzdem sind dieselben nicht kongruent. Vergleiche § 19 d.

49) α) Wenn die Winkel α und γ eines Vierecks von der Diagonale AC halbiert werden, so wird das Viereck durch AC in zwei kongruente Dreiecke geteilt.

β) Wenn in einem Viereck je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, so wird es durch jede Diagonale in zwei kongruente Dreiecke geteilt.

50) Wenn in einem Dreieck $\alpha = \beta$, so wird dasselbe durch die Halbierungslinie des Winkels γ in zwei kongruente Dreiecke geteilt. Folgere daraus, daſs $a = b$.

51) Durch den Punkt A eine Parallele zu einer Geraden a zu ziehen (ohne Hilfe des Winkelmessers mit § 19 b).

52) Die Summe der Strecken DA und DB (Fig. 8), welche den Punkt D im Innern des Dreiecks ABC mit den Endpunkten einer Seite verbinden, ist kleiner als die Summe der übrigen Seiten. Andeutung. Ersetze in dem gebrochenen Wege ACB das Stück ACE durch das kürzere AE und in dem abgekürzten Wege AEB wieder das Stück DEB durch das kürzere DB.

53) Wenn man einen Punkt im Innern des Dreiecks durch die Strecken m, n, p mit den Ecken verbindet, so ist

$$m + n + p > \frac{a + b + c}{2}, \text{ aber } m + n + p < a + b + c.$$

54) α) In einem Viereck mit hohlen Winkeln ist die Summe der Diagonalen gröſser als die Summe zweier Gegenseiten.

β) Wenn in einem Dreieck ein Winkel wächst, während die einschlieſsenden Seiten gleich bleiben, so wächst auch die gegenüberliegende Seite. Andeutung. Man benutze die Figur 9, indem man voraussetzt, daſs a' und a gleich seien. Wenn der Winkel γ gewachsen ist, so muſs ein anderer Winkel, es sei der Winkel α, abgenommen haben. Legt man die Dreiecke mit der Seite AC aneinander, so müssen AB' und CB sich notwendig schneiden (in O). Dann ist nach α): $c' + a > c + a'$; weil aber $a = a'$, so ergiebt sich, daſs $c' > c$.

55) In einem Viereck mit hohlen Winkeln ist die Summe der Diagonalen kleiner als die Summe der Seiten, aber gröſser als die halbe Summe der Seiten.

56) Der gerade Weg zwischen zwei Punkten ist kürzer als jeder gebrochene Weg.

57) Wie groſs sind die Peripheriewinkel über dem 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, 10ten Teile der Peripherie?

Wie groſs sind die Peripheriewinkel, welche zu Bogen von 15, 30, 90 Grad gehören?

58) Vier Punkte teilen den Kreis in vier auf einander folgende Bogen von 20^0, 100^0, 80^0, 160^0. Wie grofs sind die Winkel, welche man erhält, wenn die vier Punkte paarweise durch Gerade verbunden werden?

59) Ein Sekantenwinkel von 16^0 steht über einem Kreisbogen von 40^0. Wie grofs ist der Bogen, der zwischen seinen Schenkeln liegt?

60) Ein Sehnenwinkel von 40^0 steht über einem Bogen von 60^0. Wie grofs ist der von dem Scheitelwinkel eingeschlossene Bogen?

61) In einen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, welches gegebene Winkel hat.

62) Ein Kreis ist durch die Punkte A, B, C bestimmt. Man zeichne die Tangenten in diesen Punkten durch Antragen der Winkel α, β, γ des Dreiecks ABC (§ 24 b, 1).

63) Zwischen zwei Punkten A und B einen Kreisbogen von 18^0 zu zeichnen.

64) Einen Punkt zu finden, von welchem aus zwei an einander stofsende Strecken a und b bezüglich unter den Winkeln α und β gesehen werden (§ 25 a).

65) Je zwei Ecken eines Dreiecks und die Fufspunkte der zugehörigen Höhen liegen auf einem Kreise. A, B, A', B' in Fig. 20 liegen auf einem Kreise.

66) Die in Fig. 20 mit α bezeichneten Winkel sind gleich, ebenso die mit β bezeichneten. Die Winkel β und α sind unter sich gleich (§ 24 b).

67) Die Höhen eines Dreiecks halbieren den Winkel des von den Fufspunkten gebildeten Dreiecks (Fig. 20).

68) Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte. (Siehe Fig. 20 und wende Übung 67 sowie § 21 α an.)

Übungen zu Abschnitt II (zweite Folge). § 3.

1) Konstruktionen nach analytischer Methode. Man zeichnet die gesuchte Figur willkürlich (ohne Rücksicht auf die gegebenen Stücke). Indem man sodann aus den Stücken dieser Figur diejenigen Stücke konstruiert, welche von gegebener Gröfse sein sollen, entstehen Hilfsfiguren, von welchen man untersucht, ob sie durch die gegebenen Stücke bestimmt sind. Ist dies der Fall, so konstruiert man die Hilfsfiguren, und aus diesen wieder die gesuchte Figur.

Beispiel. Ein Dreieck zu konstruieren, in welchem ein

Winkel, die gegenüberliegende Seite und die Summe der anliegenden Seiten von gegebener Gröfse sind.

Analysis. Das gesuchte Dreieck sei ABC (Fig. 21), der gegebene Winkel β und die gegebene Seite AC. Mache auf der Verlängerung von AB die Strecke $BD = BC$, so ist AD die gegebene Summe und δ die Hälfte des gegebenen Winkels β (§ 11 b und 12 b).

Da nun in dem Hilfsdreieck ACD der Winkel δ, die gegenüberliegende Seite AC und die anliegende Seite AD gegeben ist, so läfst sich das Hilfsdreieck und daraus das gesuchte Dreieck konstruieren.

Konstruktion. Mache EF (Fig. 22) gleich der gegebenen Summe, $\sphericalangle EFG$ gleich dem gegebenen Winkel β, den man durch die Gerade FH halbiert. Beschreibe um E mit der gegebenen Seite den Kreis, der FH im allgemeinen in J und J' trifft. Ziehe JK und $J'K'$ parallel mit FG, so ist sowohl EJK als $EJ'K'$ das gesuchte Dreieck.

Beweis. $\sphericalangle EKJ = EFG =$ dem gegebenen Winkel, weil JK mit FG parallel ist. Ferner $JK = KF$, weil die mit δ bezeichneten Winkel einander gleich sind; folglich $EK + KJ = EK + KF = EF =$ der gegebenen Summe. Endlich $EJ =$ der gegebenen Seite. Ebenso beweist man, dafs $EJ'K'$ den Forderungen der Aufgabe genügt.

Determination. (Angabe der Grenzen, innerhalb deren die Gegebenen liegen müssen, damit die Aufgabe lösbar sei.) Die Aufgabe ist lösbar, wenn der Halbstrahl FH von dem Kreise um E getroffen wird. Dies ist der Fall, wenn die gegebene Seite nicht kleiner ist, als die Entfernung der Geraden FH von E. Die Dreiecke EKJ und $EK'J'$ sind nur durch ihre Lage verschieden. Um dies zu zeigen, ziehe man mit EF um E einen Kreis, welcher die Halbierungslinie des Winkels EFG in H schneiden möge. Die gleichzeitige Mittelsenkrechte a von JJ' und HF mufs durch E gehen (§ 20 a). Die Winkel HEJ' und JEF sind gleich, weil sie sich für die Achse a symmetrisch entsprechen. Auch Winkel $EJ'K'$ ist von derselben Gröfse (Wechselwinkel). Die Dreiecke EKJ und $EK'J'$ haben also die Winkel bei E und J', die Winkel bei K und K', sowie die Seiten EJ und EJ' entsprechend gleich (eine Seite und zwei Winkel) und sind kongruent.

2) α) Ein rechtwinkliges Dreieck ($\gamma = 90^0$) zu konstruieren aus 1. a, b. 2. a, β. 3. c, α. 4. c, a. 5. $c, \alpha - \beta = \delta$.

β) Ein Dreieck zu konstruieren aus 1. a, b, h. Analysis. ABC sei das gesuchte Dreieck. Durch Einzeichnung von h entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, die beide konstruierbar

sind. 2. a, α, h. 3. α, β, h. 4. a, q, h. 5. α, h, p. 6. h, p, q. 7. c, $t \measuredangle tc$. 8. γ, w, $\measuredangle wc$. 9. $a + b = l$, $a - b = k$, h. 10. γ, $\alpha - \beta = \delta$, h.

γ) Ein Dreieck zu konstruieren aus: 1. a, b, p. Analysis. Eines der durch Einzeichnung von h entstandenen rechtwinkligen Dreiecke ist durch p und a konstruierbar und liefert die Mittel zur Vollendung des Dreiecks ABC. Gieb für den fehlenden Eckpunkt zwei Örter an. 2. β, p, q. 3. a, γ, h. 4. a, c, t. 5. a, β, t. 6. c, β, t. 7. a, γ, w. 8. a, β, w. 9. β, γ, w. 10. c, h, t. 11. α, h, t. 12. a, h, t. 13. a, h, w. 14. β, h, w. 15. $a + b = l$, β, h. 16. a, $\alpha - \beta = \delta$, h. 17. a, h, $p - q = l$. 18. a, β, $b + h = l$. 19. b, α, $h + p = l$.

δ) Man mache sich zur Aufgabe, sämtliche Seiten und Winkel der benutzten Hilfsdreiecke darauf zu untersuchen, ob sie sich durch Stücke des Dreiecks ABC ausdrücken lassen. So ist zum Beispiele in der 10ten Aufgabe unter γ) in dem Hilfsdreieck mit den Seiten h, t die 3te Seite $(p - q) : 2$; in dem Hilfsdreieck mit den Seiten h, w (13te Aufgabe unter γ) ist $\measuredangle hw = (\alpha - \beta) : 2$. Man bildet alsdann leicht neue Aufgaben, zu deren Lösung die gefundene Beziehung den Schlüssel bildet. Z. B. Dreieck aus $p - q = l$, t und $a\,(\alpha)$*); $p - q = l$, h und $a\,(\alpha)$; $\alpha - \beta = \delta$, h und a; $\alpha - \beta = \delta$, w, a.

ε) Ein Viereck zu konstruieren aus: 1. a, b, c, d, f. 2. a, d, f, β, δ. 3. a, d, f, ε, b. 4. a, α, f, e, ε. 5. $a + b = l$, α, d, f, δ. 6. a, f, α, β, γ. 7. $b - c = l$, d, e, δ, ε. 8. b, e, f, γ, $\measuredangle ae$. 9. a, b, d, $e + f = l$, α. 10. a, b, c, β, γ. 11. a, b. d, ε, $\measuredangle ae$. Analysis zu 4. Dreieck ABD ist aus a, α und f konstruierbar. Für C hat man als Örter: 1) Die Gerade, welche durch A so gezogen ist, dafs sie mit f den Winkel ε bildet; 2) den Kreis, welcher mit e um A geschlagen ist.

3) Wenn man durch den Schnittpunkt der Halbierungslinien zweier Dreieckswinkel eine Parallele mit der eingeschlossenen Seite zieht, so ist dieselbe so grofs als die Summe der nicht parallelen Seiten in dem abgeschnittenen Viereck (Trapez).

4) Durch einen gegebenen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels eine Gerade so zu ziehen, dafs sie von beiden Schenkeln gleiche Stücke abschneidet.

5. Zwei Geraden b, b' (Fig. 23) können nicht bis zu ihrem Durchschnitte verlängert werden. Man soll α) ihren Winkel bestimmen und β) die Halbierungslinie des Winkels ziehen. An-

*) Das eingeklammerte Stück liefert eine 2te Aufgabe, wenn es für a gesetzt wird: Dreieck aus $p - q$, t und α. Diese Abkürzung in der Aufgabenstellung ist auch im folgenden angewendet.

deutung. Ziehe durch den beliebigen Punkt B auf b die Parallele c zu b'. CBE ist der gesuchte Winkel. Halbiere den Winkel DBC durch BB' und beweise die Gleichheit von β und β'. Die Mittelsenkrechte $a =$ von BB' ist die gesuchte Halbierungslinie, weil b und b' symmetrisch zu a sind.

6) In einer gegebenen Geraden einen Punkt A zu suchen, welcher α) von zwei gegebenen Punkten B und B' gleiche Entfernung hat, β) von zwei gegebenen Geraden b und b' gleiche Entfernung hat.

7) In einer Geraden a einen Punkt A zu suchen, so dafs die von ihm nach zwei gegebenen Punkten B und C (auf derselben Seite von a) gezogenen Geraden gleiche Winkel mit a bilden. Andeutung. B und C mit ihren für a entsprechenden Punkten bestimmen ein symmetrisches gleichschenkliges Trapez. Die Symmetrieachse a geht durch den Schnittpunkt A der Diagonalen und halbiert die dort gebildeten Scheitelwinkel. A ist also der gesuchte Punkt.

8) In der Geraden a einen Punkt A zu suchen, so dafs die Summe der Entfernungen AB und AC so klein wie möglich ist. Andeutung. Der gesuchte Punkt ist wieder der Schnittpunkt A der Diagonalen in dem symmetrischen Viereck $BB'C'C$. Das Minimum der Entfernungssumme ist eben die gemeinsame Gröfse der Diagonalen. Jede andere Entfernungssumme stellt sich als gebrochener Weg zwischen B und C' oder C und B' dar.

9) Den geometrischen Ort der Mittelpunkte gleicher Sehnen zu bestimmen.

10) Den geometrischen Ort derjenigen Punkte zu bestimmen, von welchen aus Tangenten von gegebener Länge an den Kreis gezogen werden können.

11) Den Ort für diejenigen Punkte zu suchen, aus welchen an einen gegebenen Kreis Tangenten gezogen werden können, welche den Tangentenwinkel α mit einander bilden.

12) α) Konstruiere ein Dreieck aus: 1. $a + b = l, c, \beta$. Analysis. Verlängere a um b, damit l als Strecke vorliege; ein konstruierbares Dreieck entsteht nun, indem man den Endpunkt D von l mit A verbindet. Auf den noch fehlenden Eckpunkt C des Dreiecks ABC kommt man durch § 20 a. 2. $c, a + b = l$ und γ (h', α, h''). 3. $a + b = l, \alpha$ und β (h''). 4. $a - b = l, c$ und β $(h', \gamma, \alpha, h'')$. 5. $a - b = l, \alpha$ und β (h''). 6. $a + b + c = l$, α und β. 7. $a - b + c = l, \alpha$ und β. 8. $p - q = l, \alpha$ und β (b). 9. $p - q = l, a, b$.

β) In Befolgung von § 3 Übung 2 δ findet man: 1. In dem bei dem ersten Beispiele in Übung 12 α benutzten Hilfsdreieck

ist der Gegenwinkel zur Seite $a + b = l$ gleich $90^0 \pm \frac{\alpha - \beta}{2}$,*) je nachdem die längere Seite um die kürzere verlängert wurde oder umgekehrt. — Dreieck aus $a + b = l$, $\alpha - \beta = \delta$ und c (h', h''). 2. In dem bei dem 4ten Beispiele in Übung 12 α benutzten Hilfsdreieck ist der Gegenwinkel zur Seite $a - b = l$ gleich $\frac{\alpha - \beta}{2}$, gleichgültig, ob die gröfsere Seite um die kleinere verkürzt oder die kleinere um die Differenz $a - b = l$ verlängert wurde. — Dreieck aus $a - b = l$, $\alpha - \beta = \delta$ und c (h', h''). 3. Das bei dem 8ten Beispiele in Übung 12 α benützte Hilfsdreieck enthält die Seiten $p - q$, a, b und die Winkel $180^0 - \alpha$, β, $\alpha - \beta$. — Dreieck aus $\alpha - \beta = \delta$, a und b ($p - q$, h).

γ) Konstruiere ein Dreieck aus: 1. c, γ und t (p, u). Welche dieser Aufgaben wird für $\gamma = 90^0$ unmöglich oder unbestimmt? 2. c, h', h''. 3. r, c und α (t, p, u, $u - v$, $\alpha - \beta$, $\alpha + 2\gamma$). 4. r, α und β (t', h''').

δ) Konstruiere ein Viereck aus a, d, α, γ und c (e, ε, $b \pm c$).

13) Der Ort für die Spitzen C aller Dreiecke, welche über der Grundlinie c konstruiert sind und den gegebenen Winkel γ haben, ist ein Kreisbogen über der Sehne AB. Der Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche diesen Dreiecken einbeschrieben sind, ist ein Kreisbogen, welcher über der Sehne AB den Winkel $90^0 + \frac{\gamma}{2}$ fafst (§ 2 Üb. 15).

14) α) Die Tangentenabschnitte, welche von den Ecken ABC des Dreiecks bis zu den Berührungspunkten des einbeschriebenen Kreises reichen, sind paarweise gleich und mögen bezüglich x, y, z heifsen. Aus $x + y = c$, $y + z = a$, $z + x = b$ folgt durch Addition $x + y + z = \frac{a + b + c}{2}$, welcher Wert mit s bezeichnet wird. Durch Subtraktion folgt: $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$. — Dreieck aus: 1. ϱ, $b + c - a$, β (c). 2. α, $b + c - a$ und β (c). 3. ϱ, c, $b \pm a$. 4. ϱ, $a + b - c$, w.

β) Die Tangentenabschnitte, welche von den Ecken ABC des Dreiecks bis zu den Berührungspunkten des der Seite c anbeschriebenen Kreises reichen, mögen x', y', z' heifsen. Aus $x' + y' = c$, $z' - y' = a$, $z' - x' = b$ folgt durch Addition: $z' = \frac{a + b + c}{2} = s$ und nun $x' = s - b$, $y' = s - a$. — Dreieck aus: 1. $a - b + c$, ϱ''' und β (γ). 2. $a + b + c$, ϱ''', α.

*) Wenn $\beta > \alpha$, so schreibe $\frac{\beta - \alpha}{2}$.

15) α) Jede Dreiecksseite wird durch die Berührungspunkte des ein- und anbeschriebenen Kreises in drei Abschnitte geteilt, von denen die beiden äufsern einander gleich sind.

β) Die Berührungspunkte zweier anbeschriebener Kreise mit dem Träger einer Dreiecksseite sind von den Endpunkten dieser Seite gleichweit entfernt.

---

§ 4. Übungen zu Abschnitt III (die besonderen Vielecke).

1) In dem gleichschenkligen Dreieck entsprechen sich die durch die Endpunkte der Grundlinie gezogenen Winkelhalbierenden (Höhen, Mittellinien) für die Symmetrieachse und schneiden sich also auf dieser Achse (§ 6 α).

2) Das gleichseitige Dreieck hat drei Symmetrieachsen, welche mit den Winkelhalbierenden, Höhen, Mittellinien des Dreiecks zusammenfallen. Diese drei Symmetrieachsen schneiden sich in einem Punkte (Üb. 1).

3) Ein Dreieck ist gleichschenklig α) wenn die Halbierungslinie a eines Winkels auf der gegenüberliegenden Seite senkrecht steht, β) wenn die durch ein Eck gezogene Mittellinie auf der gegenüberliegenden Seite senkrecht steht, γ) wenn die Mittelsenkrechte einer Seite durch das gegenüberliegende Eck geht.

4) Ein Viereck ist ein Deltoïd, α) wenn eine Diagonale die Winkel, welche sie durchzieht, halbiert, β) wenn eine Diagonale die Mittelsenkrechte der andern ist.

5) Ein gleichschenkliges Trapez (Viereck mit zwei parallelen und zwei konvergenten, aber gleichen Seiten), hat zwei Paare gleicher Nachbarwinkel. Andeutung. Ziehe $CD \parallel C'B'$ (Fig. 24), so entsteht ein Parallelogramm. Beweise, dafs Dreieck BCD gleichschenklig ist.

6) Jedes gleichschenklige Trapez ist symmetrisch für eine Achse. Diese Achse geht durch die Punkte, in welchen sich die Träger der convergenten Seiten und die Diagonalen schneiden. Sie halbiert den Winkel daselbst. Auch ist die Achse die Mittelsenkrechte einer jeden der parallelen Seiten (Grundlinien). Andeutung. Verlängere BC und $B'C'$ bis zum Schnitt in A (Fig. 24). Beweise, dafs die Dreiecke $BB'A$ und $CC'A$ gleichschenklig sind (Üb. 5, § 12 β). Ziehe die Halbierungslinie des Winkels A, welche eben die Symmetrieachse ist. Das Übrige findet sich leicht.

7) Durch den Punkt A die Parallele zur Geraden a zu ziehen. Andeutung. Setze in dem beliebigen Punkte B von a (Fig. 26) ein und ziehe durch A den Kreis *1*, welcher a in C

trifft. Beschreibe mit demselben Radius und A um C die Kreise *2* und *3*, welche den Punkt D der gesuchten Parallelen bestimmen (§ 29 b).

8) Wenn man durch jeden Eckpunkt eines Dreiecks ABC eine Parallele zur gegenüberliegenden Seite zieht, so entsteht ein neues Dreieck, in welchem A, B, C die Mittelpunkte der Seiten sind. Die Höhen des Dreiecks ABC sind die Mittelsenkrechten der Seiten des neuen Dreiecks. Auch hieraus (vergl. § 2, Üb. 68) kann man schliefsen, dafs die Höhen des Dreiecks ABC sich in einem Punkte schneiden.

9) Alle Senkrechten zwischen zwei Parallelen sind einander gleich (§ 29 a). Die gemeinsame Länge derselben wird der Abstand der Parallelen genannt.

10) Der geometrische Ort aller Punkte, welche von einer Geraden a den Abstand d haben, besteht aus zwei zu a parallelen Geraden b und c, welche in diesem Abstande d gezogen sind. Andeutung zum Beweis. Alle Punkte auf b und c haben von a den Abstand d. Alle Punkte in dem von b und c eingeschlossenen Streifen haben kleinere, alle aufserhalb des Streifens gelegenen Punkte haben gröfsere Abstände.

11) Innerhalb eines Winkels einen Punkt zu suchen, welcher von den Schenkeln gegebene Abstände hat.

12) Ein Parallelogramm, dessen Diagonalen gleich sind, ist ein Rechteck.

13) Ein Parallelogramm, dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, ist ein Rhombus.

14) Wenn eine Figur zwei zu einander senkrechte Symmetrieachsen hat, so ist sie auch symmetrisch für den Schnittpunkt der Achsen. In einer solchen Figur gehören jedem Punkte B drei andere Punkte B', B'', B''' zu, welche mit ihm ein Rechteck bilden. Andeutung. (Fig. 27.) Dem Punkte B entspricht B' für die Achse a und B'' für die Achse a'. Die Strecken AB' und AB'' sind gleich, weil sie beide der Strecke AB für eine Achse entsprechen. Der Winkel $B'AB''$ ist ein gestreckter, denn er ist doppelt so grofs, als der rechte Winkel zwischen a und a'. Daraus folgt, dafs B' und B'' sich für A symmetrisch entsprechen. Dem Punkte B'' entspricht noch B''' für die Achse a. Dann entsprechen sich auch B und B''' für den Mittelpunkt A. Die Figur $BB''B'''B'$ ist ein Parallelogramm, weil sich die Ecken paarweise für A entsprechen. Sie ist ein Rechteck, weil der Winkel $B'BB''$ ein rechter ist.

15) In jeder Figur, welche zwei zu einander senkrechte Symmetrieachsen hat, gehören zu einer Geraden drei andere, welche mit ihr einen Rhombus bestimmen.

16) Wenn eine Figur für eine Achse a und einen Punkt A auf a symmetrisch ist, so hat sie noch eine zweite Symmetrieachse a', welche durch A geht und auf a senkrecht steht. Andeutung. (Fig. 27.) Dem Punkte B' entspricht für a der Punkt B und für A der Punkt B''. Die Strecken AB und AB'' sind gleich, weil sie beide gleich AB' sind. Man ziehe nun die Gerade a' senkrecht auf a. Die Winkel α' sind gleich, weil jeder der Komplementwinkel zu einem der gleichen Winkel α ist. Wenn die Winkel α' gleich und $AB = AB''$, so sind B, B'' für die Achse a' symmetrisch entsprechend.

Die folgenden Konstruktionen 17—24 sind mit dem Lineale allein auszuführen.

17) Ein Parallelogramm ist gegeben. Man soll demselben ein anderes Parallelogramm einschreiben, von welchem der Träger einer Seite gegeben ist.

18) Ein Parallelogramm ist gegeben. Man soll demselben ein anderes Parallelogramm umschreiben, von dem ein Eckpunkt gegeben ist.

19) Ein Rechteck mit seinen Achsen ist gegeben. Man soll um dasselbe einen Rhombus beschreiben, von dem der Träger einer Seite gegeben ist.

20) Man soll in einen Rhombus ein Rechteck zeichnen, von dem ein Eckpunkt gegeben ist.

21) In das Achsensystem eines Rechtecks zu einer beliebigen Richtung (welche durch keinen Eckpunkt geht) den zugehörigen Rhombus zu zeichnen.

22) In das Achsensystem eines Rhombus oder eines Rechtecks zu einem beliebigen Punkte das zugehörige Rechteck zu zeichnen.

23) In das Achsensystem eines Rhombus soll man zeichnen:

α) Ein zweiachsiges Achtseit, welches durch zwei Seitenrichtungen in demselben Quadranten bestimmt ist.

β) Ein zweiachsiges Achteck, welches durch zwei Ecken in demselben Quadranten bestimmt ist.

24) α) Ein zweiachsiges Sechsseit zu zeichnen. (Man ziehe eine Seite senkrecht auf einer Achse und eine zweite beliebig.)

β) Ein zweiachsiges Sechseck zu zu zeichnen. (Man nehme einen Eckpunckt auf einer Achse an.)

25) Um ein Viereck, dessen Gegenwinkel supplementär sind, kann man einen Kreis ziehen. Andeutung. Ziehe den Kreis durch A, B, C in Fig. 28. Bogen AEC ist der Ort für die Punkte, aus welchen die Sehne AC unter dem Winkel $180^0 - \beta$ gesehen wird. D mufs also auf diesem Bogen liegen.

26) In ein Viereck, in welchem je zwei Gegenseiten dieselbe

Summe liefern, kann man einen Kreis zeichnen. Andeutung. Wenn man (Fig. 29) im Viereck $ABCD$ den Kreis zieht, der DA, AB, BC berührt, und von beiden Summen gegenüberliegender Seiten die Gröfse $x + y$ abzieht, so bleibt die Bedingung $NC + MD = CD$. Würde nun der Kreis nicht von CD, sondern von CE berührt, so hätte man (§ 31 α) auch $NC + ME = CE$. Durch Subtraktion erhält man $ME - MD = DE = CE - CD$, was unmöglich ist (§ 19 a, Folgerung).

27) In jedes Deltoïd läfst sich ein Kreis zeichnen. Andeutung. Nach Übung 26, oder: Ziehe den Kreis so, dafs er drei Seiten berührt; beweise (§ 16 b, 2), dafs der Mittelpunkt auf der Symmetrieachse liegt und schliefse aus § 16 a, dafs er auch die vierte Seite berührt.

28) Um jedes gleichschenklige Trapez läfst sich ein Kreis zeichnen. Andeutung. Nach Übung 25, oder: Ziehe den Kreis durch drei Ecken; beweise, dafs der Mittelpunkt auf der Symmetrieachse liegt (§ 16 b, 1) und schliefse aus § 16 a, dafs der Kreis auch durch den vierten Eckpunkt geht.

29) Unter welcher Bedingung läfst sich ein Kreis ziehen α) um ein Deltoïd, β) in ein Trapez?

30) Ein regelmäfsiges Vieleck ist symmetrisch α) für jede Halbierungslinie eines Winkels, β) für jede Mittelsenkrechte einer Seite. Andeutung. In beiden Fällen beweist man sehr leicht, dafs beiderseits die Seiten, Ecken, Winkel sich paarweise für die Achse symmetrisch entsprechen.

31) Ist die Seitenzahl des regelmäfsigen Vielecks ungerade, so ist jede Halbierungslinie eines Winkels zugleich die Mittelsenkrechte der gegenüberliegenden Seite. Das Vieleck hat also n gleichartige Symmetrieachsen. Andeutung. Nachdem man durch das Eck A die Halbierungslinie des Winkels als Achse gezogen hat, bleibt noch eine gerade Zahl von Ecken übrig. Die zwei letzten dieser Ecken entsprechen sich auch für die Achse, welche somit die Mittelsenkrechte der sie verbindenden Vielecksseite ist.

32) Ist die Seitenzahl des regelmäfsigen Vielecks gerade, so wird jede Halbierungslinie eines Winkels durch den gegenüberliegenden Eckpunkt gehen und den Winkel daselbst halbieren. Jede Mittelsenkrechte einer Seite wird auch die gegenüberliegende Seite senkrecht halbieren. Das Vieleck hat $n : 2$ Symmetrieachsen der einen und ebenso viele Symmetrieachsen der andern Art. Andeutung. Hat man den Winkel am Eckpunkt A halbiert, so werden wegen der paaren Seitenzahl zuletzt zwei Seiten übrig sein, welche sich für die Achse entsprechen. Ihr Schnittpunkt, das dem Punkt A gegenüberliegende Eck, mufs also auf der

Achse liegen und der Winkel daselbst wird von der Achse halbiert u. s. w.

33) Die n Symmetrieachsen eines regelmäfsigen Vielecks gehen alle durch den Mittelpunkt des dem Vieleck umbeschriebenen Kreises. Sie sind Träger von doppelt so vielen Halbstrahlen, welche den Winkelraum von 360^0 in $2 \cdot n$ gleiche Teile teilen. Ist die Seitenzahl des Vielecks gerade, so kann man die Anzahl dieser Winkel durch 4 teilen, und kommt so auf einen rechten Winkel. Solche Vielecke haben also Symmetrieachsen, die auf einander senkrecht stehen, und sind symmetrisch für den Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises (Üb. 14). Bei den Vielecken mit ungerader Seitenzahl ist dies nicht der Fall.

34) Ein Sehnenvieleck ist regelmäfsig, wenn seine Seiten gleich sind. Andeutung. Die den Seiten zugehörigen Centriwinkel sind auch gleich, das Vieleck ist also nach § 32 a regelmäfsig.

35) Ein Tangentenvieleck ist regelmäfsig, wenn seine Winkel gleich sind. Andeutung. Die Halbierungslinien der Vieleckswinkel gehen durch den Mittelpunkt des Kreises. Jedes der so entstandenen Dreiecke ist gleichschenklig (§ 12 β), so dafs je zwei auf einander folgende Ecken und deshalb alle Ecken vom Mittelpunkte denselben Abstand haben. Aufserdem sind die Centriwinkel in diesen Dreiecken gleich. Das Vieleck ist nach § 32 a regelmäfsig.

36) Ein Sehnenvieleck von ungerader Seitenzahl ist auch regelmäfsig, wenn seine Winkel gleich sind. Andeutung. (Fig. 30.) Zeige, dafs das Vieleck für die Mittelsenkrechte a irgend einer Seite symmetrisch ist. B und C sind symmetrisch zu a. Die Strahlen BE und CD sind wegen der Gleichheit der Winkel B und C symmetrisch entsprechend, folglich auch ihre Schnittpunkte E und D mit dem für a symmetrischen Kreise. So weiter schliefsend findet man, dafs irgend zwei auf einander folgende Seiten (ihr Schnittpunkt sei das Eck P) für die Mittelsenkrechte der dem Eckpunkte P gegenüberliegenden Seite sich symmetrisch entsprechen und gleich sind.

---

§ 5. Übungen zu Abschnitt III.

1) α) ein gleichschenkliges Dreieck (Grundlinie c) zu zeichnen aus 1. a, γ. 2. c, α. 3. a, c. 4. a, α. 5. aus dem Umring und der Höhe.

β) ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck aus seiner Höhe zu zeichnen.

γ) ein gleichseitiges Dreieck aus seinem Umring zu zeichnen (eine Strecke in drei gleiche Teile zu teilen).

2) Ein Parallelogramm zu zeichnen aus: 1. a, b, e. 2. a, e, α. 3. a, h, b. 4. a, h, α. 5. a, e, ε. 6. a, e, f. 7. e, f, ε. 8. e, f, h.

3) Ein Rechteck zu zeichnen aus: 1. a, e. 2. a, ε. 3. e, ε.

4) Einen Rhombus zu zeichnen aus: 1. e, f. 2. e, a. 3. e, h. 4. e, α. 5. h, α.

5) Ein Quadrat zu zeichnen aus: 1. a. 2. e.

6) Ein Dreieck zu zeichnen aus: 1. $a + b + c = l$, α, h. 2. $a - b + c = l$, a, h. 3. $p - q = l$, α, h. 4. c, γ, h. 5. r, α, h'. 6. $a + b - c$, ϱ''' und ϱ (γ). 7. $a - b + c$, ϱ, ϱ'''. 8. $c + b - a$, ϱ''', ϱ. 9. $a + b + c$, ϱ''', ϱ'. 10. c, ϱ, γ. (Vergl. § 3, Übung 13.) 11. $\gamma = 90^0$, c, ϱ.

7) α) Konstruiere ein Viereck aus 1. a, b, c, d und $\sphericalangle bd$. Andeutung. Die gegebenen Seiten b, d und der eingeschlossene Winkel $\sphericalangle b\,d$ liegen nicht in einem Dreieck. Um ein konstruierbares Hilfsdreieck zu erhalten, verschiebe man die eine der Strecken b, d parallel mit der anfänglichen Lage längs einer der übrigen Seiten. Die bewegte Strecke durchstreicht die Fläche eines Parallelogramms und der Winkel zwischen b und d bleibt dabei ungeändert. 2. $a, b, c, d, \alpha + \beta$. 3. $a, c, \alpha, \beta, \gamma$.

β) Konstruiere ein Trapez aus b, d, f und $\sphericalangle bd$ (α, β, h, $\alpha - \beta$).

γ) Konstruiere ein Viereck aus a, e, f, ε und b ($\sphericalangle ae$, $\sphericalangle be$, c).

δ) Konstruiere ein Trapez aus α, e, f und ε (h, $\sphericalangle ae$).*)

8) Das bei Üb. 7 β benützte Hilfsdreieck enthält die Seiten $a - c$, b, d, die Winkel α, β, $\sphericalangle bd$. — Trapez aus $a - c$, b, d, f; aus a, b, c, d.

9) Das bei Üb. 7 δ benützte Hilfsdreieck enthält die Seiten $a + c$, e, f und den Winkel ε. — Trapez aus $a + c$, e, f, b; aus a, c, e, f.

10) Konstruiere ein gleichschenkliges Trapez aus: 1. a, b, e. 2. a, b, h. 3. a, b, α. 4. a, h, α.

11) Verschiebt man in dem Dreieck ABC (Fig. 25) die Seite a, bis ihr Endpunkt C nach A gelangt, so ist B in die vierte Ecke D des Parallelogramms $ACBD$ gekommen. Die Diagonale CD des letzteren halbiert AB in E, und die Hälfte CE dieser Diagonale CD fällt mit t''' zusammen. Das Hilfsdreieck ACD hat die Seiten b, a, $2\,.\,t'''$, die Winkel $180^0 - \gamma$, $\sphericalangle bt'''$, $\sphericalangle at'''$ und die Höhen h' und h''. — Dreieck aus a, b, t'''; aus $a, t''', \sphericalangle bt'''$; aus $a, t''', \sphericalangle at'''$; aus b, t''', h''; aus b, t''', h'.

*) Einige der Aufgaben in Übung 7 können auch ohne Verschiebung von Strecken leicht gelöst werden.

12) Konstruiere ein Sehnenviereck aus: 1. r, a, b und c (α, f, ε, $\alpha \pm \beta$). 2. r, $a \pm b$, c und γ (α, f, e, β, d).

13) Konstruiere ein Tangentenviereck aus: 1. ϱ, α, β und γ (b, $a + b$, e). 2. a, c, b und α (f, $\beta + \gamma$).

14) Ein Dreieck zu zeichnen, wenn die Mittelpunkte der Seiten gegeben sind.

15) Konstruiere ein Dreieck aus: 1. ϱ, α und c (β, h, q, w'). 2. c, γ und ϱ ($\varrho + r$). 3. c, r, ϱ. 4. c, γ, ϱ'''. 5. c, r, ϱ'''.

16) Ein Kreis und ein Tangentenwinkel desselben sind gegeben. Man soll eine dritte Tangente ziehen, so dafs das in den Tangentenwinkel fallende Stück derselben eine gegebene Länge habe. (Vergl. § 5, Üb. 6, Beispiel 10.)

17) Konstruiere ein Tangentenviereck aus ϱ, c, α, β.

18) In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Mittellinie nach der Mitte der Hypotenuse halb so grofs als die Hypotenuse.

19) Wenn in einem Dreieck die Mittellinie nach der Mitte einer Seite die Hälfte dieser Seite ist, so ist der gegenüberliegende Winkel ein rechter.

20) Welches ist der geometrische Ort derjenigen Punkte, welche von zwei parallelen Geraden gleiche Entfernung haben?

21) In einen Winkel eine gegebene Strecke so zu legen, dafs sie mit einer gegebenen Geraden parallel ist.

22) Durch einen gegebenen Punkt D, der innerhalb eines Winkels liegt, eine Gerade so zu ziehen, dafs D ihr Mittelpunkt wird.

23) Zwischen zwei Parallelen durch einen gegebenen Punkt eine gegebene Strecke zu legen.

24) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche, mit gegebenem Radius beschrieben,

α) eine gegebene Gerade berühren;

β) einen gegebenen Kreis berühren;

γ) mit einem gegebenen Kreise eine Sehne von der Länge l gemein haben;

δ) einen gegebenen Kreis in den Endpunkten eines Durchmessers schneiden.

Andeutung zu γ. Die Entfernung des Mittelpunktes vom Centrum des gegebenen Kreises ist Längendiagonale eines Deltoïds, welches durch die Seiten und die Querdiagonale bestimmt ist.

25) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche zwei parallele Gerade berühren?

26) Mit gegebenem Radius einen Kreis zu zeichnen, welcher

α) durch zwei gegebene Punkte A, B geht;

β) zwei konvergente Geraden a, b berührt;

γ) durch den Punkt A geht und die Gerade b berührt;
δ) durch den Punkt A geht und den gegebenen Kreis K berührt.

Übungen zu Abschnitt IV (Flächeninhalt). § 6.

1) Wie groſs ist die Fläche ω eines Parallelogramms oder Rechtecks, wenn α) $g = 3{,}725$, $h = 2{,}976$, β) $g = 10{,}279$, $h = 9{,}827$.

2) Wie groſs ist die Fläche ω eines Dreiecks, in welchem g und h die angegebenen Werte haben?

3) Wie groſs ist die Grundlinie g eines Dreiecks, wenn α) $\omega = 72$, $h = 9$; β) $\omega = 240$, $h = 24$; γ) $\omega = 950$, $h = 25$.

4) Wie groſs ist die Höhe eines Dreiecks, wenn α) $\omega = 45{,}6423$, $g = 4{,}1493$; β) $\omega = 7{,}28$, $g = 1{,}3$; γ) $\omega = 9{,}18$, $g = 2{,}7$.

5) Wie groſs sind die Seiten eines Quadrats, wenn α) $\omega = 1{,}4641$, β) $\omega = 2{,}89$, γ) $\omega = 2$.

6) Wie groſs ist die Fläche eines Trapezes, wenn α) $g = 8$, $g' = 6$, $h = 3$; β) $g = 17{,}23$, $g' = 12{,}11$, $h = 5{,}2$; γ) $g = 3{,}725$, $g' = 2{,}123$, $h = 1{,}18$.

7) Wie groſs ist die untere Grundlinie g eines Trapezes, wenn α) $g' = 4$, $h = 3$, $\omega = 18$; β) $g' = 32$, $h = 2$, $\omega = 95$; γ) $g' = 8$, $h = 2$, $\omega = 18$.

8) Wie groſs ist die Höhe h eines Trapezes, wenn α) $g = 2{,}4$, $g' = 2$, $\omega = 1{,}76$; β) $g = 23$, $g' = 15$, $\omega = 143{,}83$.

9) Ein Quadrat liegt mit der einen Ecke in der Ecke eines gröſseren Quadrates. Der Überschuſs der Seite des gröſseren Quadrates über die des kleineren ist 118 m, der Überschuſs der Quadrate selbst 26 432 qm. Wieviel Inhalt hat jedes der beiden Quadrate?

10) Ein Feld von der Form eines Trapezes wurde zu 7150 Mark gekauft, nämlich der Ar zu 22 Mark. Wenn nun die Höhe des Trapezes 65 Meter beträgt und die kleinere Grundlinie 200 m, wie lang ist die gröſsere Grundlinie?

11) Wie viele Rechtecke von 62 cm Länge und 25 cm Breite braucht man, um eine rechtwinklige Fläche von 43,4 m Länge und 7,5 m Breite zu belegen?

12) Eine Diagonale eines Vierecks beträgt 13 m, die von den nicht auf ihr liegenden Eckpunkten auf dieselbe gefällten Senkrechten sind 7,3 m und 2,5 m. Wie groſs ist die Fläche dieses Vierecks?

13) Die Seiten dreier regelmäſsigen Vielecke seien 1. Wenn

12) Konstruiere ein Sehnenviereck aus: 1. r, a, b und c (α, f, ε, $\alpha \pm \beta$). 2. r, $a \pm b$, c und γ (α, f, e, β, d).

13) Konstruiere ein Tangentenviereck aus: 1. ϱ, α, β und γ (b, $a + b$, e). 2. a, c, b und α (f, $\beta + \gamma$).

14) Ein Dreieck zu zeichnen, wenn die Mittelpunkte der Seiten gegeben sind.

15) Konstruiere ein Dreieck aus: 1. ϱ, α und c (β, h, q, w'). 2. c, γ und ϱ ($\varrho + r$). 3. c, r, ϱ. 4. c, γ, ϱ'''. 5. c, r, ϱ'''.

16) Ein Kreis und ein Tangentenwinkel desselben sind gegeben. Man soll eine dritte Tangente ziehen, so dafs das in den Tangentenwinkel fallende Stück derselben eine gegebene Länge habe. (Vergl. § 5, Üb. 6, Beispiel 10.)

17) Konstruiere ein Tangentenviereck aus ϱ, c, α, β.

18) In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Mittellinie nach der Mitte der Hypotenuse halb so grofs als die Hypotenuse.

19) Wenn in einem Dreieck die Mittellinie nach der Mitte einer Seite die Hälfte dieser Seite ist, so ist der gegenüberliegende Winkel ein rechter.

20) Welches ist der geometrische Ort derjenigen Punkte, welche von zwei parallelen Geraden gleiche Entfernung haben?

21) In einen Winkel eine gegebene Strecke so zu legen, dafs sie mit einer gegebenen Geraden parallel ist.

22) Durch einen gegebenen Punkt D, der innerhalb eines Winkels liegt, eine Gerade so zu ziehen, dafs D ihr Mittelpunkt wird.

23) Zwischen zwei Parallelen durch einen gegebenen Punkt eine gegebene Strecke zu legen.

24) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche, mit gegebenem Radius beschrieben,

α) eine gegebene Gerade berühren;

β) einen gegebenen Kreis berühren;

γ) mit einem gegebenen Kreise eine Sehne von der Länge l gemein haben;

δ) einen gegebenen Kreis in den Endpunkten eines Durchmessers schneiden.

Andeutung zu γ. Die Entfernung des Mittelpunktes vom Centrum des gegebenen Kreises ist Längendiagonale eines Deltoïds, welches durch die Seiten und die Querdiagonale bestimmt ist.

25) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche zwei parallele Gerade berühren?

26) Mit gegebenem Radius einen Kreis zu zeichnen, welcher

α) durch zwei gegebene Punkte A, B geht;

β) zwei konvergente Geraden a, b berührt;

γ) durch den Punkt A geht und die Gerade b berührt;
δ) durch den Punkt A geht und den gegebenen Kreis K berührt.

Übungen zu Abschnitt IV (Flächeninhalt). § 6.

1) Wie groſs ist die Fläche ω eines Parallelogramms oder Rechtecks, wenn α) $g = 3{,}725$, $k = 2{,}976$, β) $g = 10{,}279$, $h = 9{,}827$.

2) Wie groſs ist die Fläche ω eines Dreiecks, in welchem g und h die angegebenen Werte haben?

3) Wie groſs ist die Grundlinie g eines Dreiecks, wenn α) $\omega = 72$, $h = 9$; β) $\omega = 240$, $h = 24$; γ) $\omega = [illegible]$, $h = [illegible]$

4) Wie groſs ist die Höhe eines Dreiecks, wenn α) $\omega = 45{,}6423$, $g = 4{,}1493$; β) $\omega = 7{,}28$, $g = [illegible]$; γ) $\omega = [illegible]$, $g = 2{,}7$.

5) Wie groſs sind die Seiten eines Quadrats, wenn α) $\omega = 1{,}4641$, β) $\omega = 2{,}89$, γ) $\omega = 2$.

6) Wie groſs ist die Fläche eines Trapezes, wenn α) $g = [illegible]$, $g' = 6$, $h = 3$; β) $g = 17{,}2[illegible]$, $g' = [illegible]$, $h = [illegible]$; γ) $g = [illegible]$, $g' = 2{,}123$, $h = 1{,}1[illegible]$

7) Wie groſs ist die untere Grundlinie g eines Trapezes, wenn α) $g' = 4$, $h = 3$, $\omega = 1[illegible]$; β) $g' = [illegible]$, $h = [illegible]$, $\omega = [illegible]$; γ) $g' = 8$, $h = 2$, $\omega = 1[illegible]$.

8) Wie groſs ist die Höhe h eines Trapezes, wenn α) $g = [illegible]$, $g' = 2$, $\omega = 1{,}76$; β) $g = [illegible]$, $g' = [illegible]$, $\omega = [illegible]$

9) Ein Quadrat liegt mit der einen Ecke in der Höhe des gröſseren Quadrates. Der Überschuſs der beiden Quadrate über die des kleineren ist [illegible] der Quadrate selbst 26 432 qm. Wieviel Inhalt hat die beiden Quadrate?

10) Ein Feld von der Form eines Trapezes [illegible] 7150 Mark gekauft, nämlich der Ar zu [illegible] die Höhe des Trapezes 65 Meter beträgt und die [illegible] linie 200 m, wie lang ist die gröſsere Grundlinie?

11) Wie viele Rechtecke von [illegible] Breite braucht man, um eine rechtwinklige [illegible] Länge und 7,5 m Breite zu belegen?

12) Eine Diagonale eines Vierecks [illegible] den nicht auf ihr liegenden Eckpunkten [illegible] Senkrechten sind 7,3 m und 2,5 m. Wie [illegible] dieses Vierecks?

13) Die Seiten dreier regelmäſsigen [illegible]

die Vielecke nach einander 6, 12, 24 Seiten haben, so beträgt der Abstand der Seiten vom Mittelpunkte bezüglich 0,866, 0,966, 0,991. Wie groſs sind die Flächen der drei Vielecke?

14) α) Ein Parallelogramm in n gleiche Teile zu teilen.

β) Ein Dreieck in n gleiche Teile zu teilen. Andeutung. α) Man teile die Grundlinie des Parallelogramms in n gleiche Teile und ziehe durch die Teilpunkte Parallelen mit den anliegenden Seiten. β) Man teile die Grundlinie des Dreiecks in n gleiche Teile und verbinde die Teilpunkte mit dem gegenüberliegenden Eck. (Die Teilung einer Strecke soll mit dem Maſsstabe ausgeführt werden. Die Teilung durch Konstruktion folgt erst in § 40 c.)

15) α) Ein Parallelogramm in zwei Teile zu teilen, die sich wie die Zahlen m und n verhalten.

β) Ein Dreieck in zwei Teile zu teilen, die sich wie die Zahlen m und n verhalten. Andeutung. α) Man teile die Grundlinie des Parallelogramms in $m + n$ gleiche Teile und ziehe durch den m^{ten} Teilpunkt eine Parallele mit den anliegenden Seiten. β) Man teile die Grundlinie des Dreiecks in $m + n$ gleiche Teile und verbinde den m^{ten} Teilpunkt mit dem gegenüberliegenden Eck.

16) Ein Parallelogramm von einem Eckpunkte A aus in n gleiche Teile zu teilen. Andeutung. Wenn n eine gerade Zahl ist, so teile jede der Seiten, welche nicht durch A gehen, in $\frac{n}{2}$ gleiche Teile und verbinde A mit den Teilpunkten. Wenn n eine ungerade Zahl ist, so teile zuerst in $2 \cdot n$ Teile.

17) Alle gleichen Parallelogramme über derselben Grundlinie liegen zwischen zwei Parallelen. Andeutung. Sie haben gleiche Höhe h. Ihre obern Grundlinien liegen auf der Parallelen zur untern Grundlinie, die im Abstande h gezogen ist.

18) Die Spitzen aller gleichen Dreiecke über derselben Grundlinie liegen auf einer mit der Grundlinie parallelen Geraden.

19) Wenn man durch einen Punkt in der Diagonale eines Parallelogramms Parallelen mit den Seiten zieht, so sind die beiden Parallelogramme einander gleich, durch welche die Diagonale nicht geht. Andeutung. (Fig. 31.) Aus $ABC = ADC$, $AFO = AJO$, $OHC = OGC$ (§ 28 c) folgt durch Subtraktion $FBHO = JOGD$.

20) Ein Parallelogramm in ein anderes von gegebenem Winkel oder in ein Rechteck zu verwandeln, ohne die Grundlinie zu ändern (§ 37 a).

21) Ein Dreieck in ein anderes von gegebenem Winkel oder

in ein rechtwinkliges zu verwandeln, ohne die Grundlinie zu ändern (§ 37 a).

22) Ein Parallelogramm (Rechteck) in ein anderes mit vorgeschriebener Grundlinie zu verwandeln.

Auflösung. $FBHO$ (Fig. 31) sei das gegebene Parallelogramm und HC die auf die Verlängerung einer Seite abgetragene neue Grundlinie. Man verlängere BF bis zum Schnittpunkte A mit der Geraden CO und vollende das Parallelogramm $BCDA$. Dann werden die Verlängerungen von HO und FO das gesuchte Parallelogramm $JOGD$ bestimmen. (Übung 19.)

23) Ein Dreieck in ein anderes mit vorgeschriebener Grundlinie zu verwandeln. Andeutung. BFC (Fig. 32) sei das gegebene Dreieck und BA die neue Grundlinie. Man verbinde A mit C und ziehe $F'D$ mit AC parallel, so ist BAD das verlangte Dreieck.

24) Ein Vieleck in ein Dreieck zu verwandeln. Andeutung. Schneide durch eine Diagonale AC (Fig. 33) ein Dreieck ABC von dem gegebenen Vieleck ab. Wenn die Verlängerung der Seite DC und eine durch B mit AC gezogene Parallele sich in G schneiden, so ist die Fläche des Dreiecks ABC derjenigen des Dreiecks AGC gleich. Das Vieleck $ACBDEF$ ist also in ein anderes $AGDEF$ verwandelt, welches die gleiche Fläche besitzt und eine Seite weniger hat. Man wiederhole dieses Verfahren.

25) Die Grenze zweier Grundstücke ist eine gebrochene Linie. Man soll diese Grenze in eine geradlinige verwandeln, ohne die Flächen der Grundstücke zu ändern. Andeutung. (Fig. 34.) Ziehe durch B eine Parallele zu AC und verbinde A mit D oder C mit E.

26) Durch den Punkt M in Fig. 35 eine Gerade so zu ziehen, dafs das von dem Dreieck ABC unten abgeschnittene Stück dem Dreieck APM gleich sei. Andeutung. Ziehe $PE \parallel MB$, so ist ME die gesuchte Teillinie.

27) Das Dreieck ABC in Fig. 35 von M aus in n gleiche Teile zu teilen. Andeutung. Betrachte AC (Fig. 35) als die Grundlinie des Dreiecks und verwandle es nach Üb. 23 in ein anderes Dreieck AMD mit der Grundlinie AM (D ist in der Figur nicht gezeichnet), so wird nach jener Konstruktion das Eck D auf der Verlängerung von AB liegen. Teile das Dreieck AMD von der Spitze M aus nach Übung 14 β in n gleiche Teile und verwende für die Teillinien, welche über das Dreieck ABC hinausreichen, die Übung 26.

28) Ein stumpfwinkliges Dreieck mit Beibehaltung der dem

stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite in ein rechtwinkliges zu verwandeln.

29) Ein Parallelogramm (Dreieck) in ein anderes von gegebener Seite zu verwandeln α) ohne die Grundlinie zu verändern, β) ohne die Diagonale zu verändern.

30) Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, von welchem die Grundlinie und ein anliegender Winkel gegeben ist.

31) Ein Dreieck in ein anderes von gegebener Seite und gegebenem Winkel zu verwandeln.

32) Ein Dreieck mit Beibehaltung eines Winkels an der Grundlinie in ein anderes von gegebener Höhe zu verwandeln.

33) Zwei beliebige Parallelogramme (Dreiecke) zu einem einzigen zu vereinen.

34) Die Fläche eines Trapezes ist gleich dem Produkt aus der Höhe und derjenigen Strecke, welche die Mittelpunkte der nicht parallelen Seiten verbindet. Andeutung. (Fig. 36.) Ziehe $EF \parallel DA$. Die Dreiecke NCE und NBF sind gleich, weil sie sich für das Centrum N entsprechen. Die Fläche des Trapezes ist also gleich der Fläche des Parallelogramms $AFED$.

35) Ein Trapez wird halbiert durch jede Gerade, welche durch den Halbierungspunkt der Mittellinie geht und die beiden parallelen Seiten (Grundlinien) schneidet.

36) Ist die Mittellinie eines Parallelogramms oder Trapezes in n gleiche Teile geteilt und werden durch die Teilpunkte gerade Linien zwischen den Grundlinien gezogen, welche sich nicht innerhalb der Figur schneiden, so teilen sie die Figur in n gleiche Teile.

37) Ein Parallelogramm in ein Trapez zu verwandeln, dessen eine Seite verlängert durch einen gegebenen Punkt geht.

38) Wenn man einen Punkt im Innern eines Dreiecks mit den drei Ecken verbindet, so stehen je zwei der entstandenen Dreiecke in demselben Verhältnis, in welchem die Grundlinie des dritten Dreiecks durch die Verlängerung der gemeinsamen Seite der beiden ersten geteilt wird. Andeutung. Jedes Dreieck ist die Differenz zweier Dreiecke. Die Minuenden und Subtrahenden stehen in dem angegebenen Verhältnis, folglich auch die Differenzen.

39) Ein Dreieck auf die in 38 angegebene Weise in drei Dreiecke zu teilen, welche sich verhalten, α) wie $1 : 2 : 3$, β) wie $1 : 1 : 3$, γ) wie $1 : 1 : 1$, δ) wie die Seiten eines Dreiecks (§ 21 α).

40) Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks seien a und b. Die Hypotenuse c werde durch die Höhe h in die Abschnitte p und q geteilt, von denen p an a und q an b anliegt.

Es gelten nun die Formeln: $\alpha)$ $a^2 = c \cdot p$; $b^2 = c \cdot q$; $\beta)$ $a^2 + b^2 = c^2$. $\gamma)$ $h^2 + p^2 = a^2$; $h^2 + q^2 = b^2$. $\delta)$ $h^2 = p \cdot q$. Andeutung. $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ finden sich leicht durch § 38. $\delta)$ findet man aus $h^2 = a^2 - p^2$, wenn man für a^2 den Wert $c \cdot p$ einsetzt. Man hat $h^2 = c \cdot p - p^2 = p(c - p) = p \cdot q$.

41) Die übrigen der in 40) angegebenen Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen, wenn $\alpha)$ $a = 5$, $b = 6$. $\beta)$ $a = 4$, $c = 7$. $\gamma)$ $a = 3{,}4$, $h = 2{,}1$. $\delta)$ $c = 7$, $h = 2$. $\varepsilon)$ $c = 3$, $h = 1$.

42) Wenn a die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist, so beträgt die Höhe $\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ und die Fläche $\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$.

43) Die Seite eines Rhombus ist 12 m und ein Winkel desselben ist 60^0. Wie groſs ist sein Inhalt?

44) Zu untersuchen, ob ein Dreieck recht-, spitz- oder stumpfwinklig ist, wenn seine Seiten betragen: $\alpha)$ 12, 16, 20; $\beta)$ 15, 10, 9; $\gamma)$ 12, 9, 11; $\delta)$ 3, 4, 5; $\varepsilon)$ 6, 8, 10.

45) Wenn a und b zwei Zahlen sind und x, y, z die Seiten eines Dreiecks bedeuten, so ist dieses Dreieck rechtwinklig, wenn die Gleichungen $x^2 = a \cdot b$, $y = \frac{a - b}{2}$, $z = \frac{a + b}{2}$ gelten.

46) Wenn 14, 13, 15, (56, 25, 39) bezüglich die Längen der Grundlinie und der beiden andern Seiten sind, so sind die Längen der Höhe und der Abschnitte auf der Grundlinie durch ganze Zahlen dargestellt.

47) Welche Entfernung vom Mittelpunkte des Kreises hat eine Sehne von der Länge s? Antwort: $\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}$.

48) Welches ist die Länge der Sehne, deren Entfernung vom Mittelpunkte d ist? Antwort: $2\sqrt{r^2 - d^2}$.

49) Je kleiner die Sehne, um so gröfser ist ihre Entfernung vom Mittelpunkte und umgekehrt.

50) Die kleinste Sehne, welche durch einen Punkt M geht, steht senkrecht auf Strecke MC, welche M mit dem Mittelpunkte verbindet. Sie wird in M halbiert (§ 26, b, 3).

51) Projiciert man zwei Seiten eines Dreiecks aufeinander, so sind die Produkte aus jeder der Seiten und der Projektion der andern gleich. Andeutung. Nach § 39 a) hat man $a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cq = b^2 + c^2 \mp 2by$ (y bedeutet die Projektion von c auf b). Das obere Zeichen gilt, wenn der Winkel α spitz, das untere, wenn α stumpf ist.

52) In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der vier Seiten gleich der Summe der Quadrate beider Diagonalen. Andeutung. (Fig. 37.) $f^2 = a^2 + d^2 - 2a \cdot x$, $e^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot y$. Die Strecken x und y sind gleich, weil sie sich

für den Schnittpunkt der Diagonalen symmetrisch entsprechen. Durch Addition: $e^2 + f^2 = 2a^2 + d^2 + b^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2a^2 + 2b^2$.

53) In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite und das vierfache Quadrat der zugehörigen Mittellinie gleich der doppelten Summe der Quadrate über den beiden andern Seiten. Andeutung. (Fig. 38.) Verlängere die Mittellinie um sich selbst, um den vierten Eckpunkt eines Paralellogramms zu erhalten. Nach Üb. 52 ist $2c^2 + 2b^2 = a^2 + (2 \cdot t')^2 = a^2 + 4t'^2$.

54) Jede der drei Mittellinien durch die drei Seiten des Dreiecks auszudrücken ($t' = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$).

55) Aus Übung 53 die Gleichung $4(t'^2 + t''^2 + t'''^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$ abzuleiten.

56) Um die Seiten des Dreiecks durch die Mittellinien auszudrücken, zieht man die Gleichung $b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2 = 2t'^2$ von $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(t'^2 + t''^2 + t'''^2)$ ab. ($a = \frac{2}{3}\sqrt{2t''^2 + 2t'''^2 - t'^2}$.)

57) Der Kreis um die Mitte der Strecke a (Fig. 38) mit t' als Radius ist der Ort aller Punkte, für welche die Quadrate der Entfernungen von den Endpunkten der Strecke eine konstante Summe haben (Üb. 53).

58) Konstruiere ein Dreieck aus 1. $a^2 + b^2 = l^2$, c und α (γ, h''', r, h'). 2. $a^2 + b^2$, h', β. 3. $a^2 + b^2$, r, γ. 4. $a^2 + b^2$, t und $\alpha(\gamma, h', p - q)$.

59) Aus der Gleichung $a^2 = b^2 + c^2 - 2cq$ die Gröfse q zu bestimmen und h''' zu berechnen. Andeutung.

$$q = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}, \quad h'''^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}.$$

60) Die Form für h'''^2 in Übung 59 durch Anwendung der Regel $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$ umzuformen. Andeutung. Man erhält zuerst $\frac{[(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2]}{4c^2}$ und durch nochmalige Anwendung derselben Regel

$$\frac{(b + c + a) \cdot (b + c - a) \cdot (a + b - c) \cdot (a - b + c)}{4c^2}.$$

Wenn man $\frac{a + b + c}{2}$ gleich s setzt, so sind die vier Faktoren des Zählers $2s$, $2(s - a)$, $2(s - b)$, $2(s - c)$. Durch Einsetzen erhält man $h'''^2 = \frac{4}{c^2} \cdot s(s - a)(s - b)(s - c)$

$$\text{oder } h''' = \frac{2}{c} \cdot \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

61) Die Fläche ω des Dreiecks durch die drei Seiten auszudrücken. Andeutung. Multipliziert man die letzte Gleichung in Üb. 60 mit $\frac{c}{2}$, so erhält man $\omega = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

62) Den Radius ϱ des einbeschriebenen Kreises durch die drei Seiten des Dreiecks auszudrücken. Andeutung. Verbinde die Ecken des Dreiecks mit dem Mittelpunkte dieses Kreises. Man hat

$$\omega = \frac{a \cdot \varrho}{2} + \frac{b \cdot \varrho}{2} + \frac{c \cdot \varrho}{2} = \frac{\varrho}{2}(a+b+c) = \varrho \cdot s;$$

$$\varrho = \frac{1}{s} \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

63) Die Differenz der Quadrate zweier Dreiecksseiten ist gleich der Differenz der Quadrate ihrer Projektionen auf die dritte Seite; $a^2 - b^2 = p^2 - q^2$ (Fig. 39).

64) α) Wenn in einem Dreieck (Fig. 39) $a^2 - b^2 = l$ und c gegeben sind, so kann man p und q und dadurch den Fufspunkt von h eindeutig bestimmen. Die in diesem Fufspunkte errichtete Senkrechte ist also der geometrische Ort für die Spitze des Dreiecks. Beweis: $a^2 - b^2 = p^2 - q^2 = (p+q)(p-q)$. Je nachdem l^2 gröfser, gleich oder kleiner als c^2 ist, wird $\sphericalangle BAC$ stumpf, recht oder spitz sein. Im ersten Falle ist $c = p - q$, im dritten $c = p + q$, der zweite Fall ist leicht zu erledigen. Für den dritten Fall z. B. hat man $p^2 - q^2 = l^2$, $p + q = c$, $p - q = l^2 : c$, $p = (c^2 + l^2) : 2c$; $q = (c^2 - l^2) : 2c$.

β) Konstruiere ein Dreieck aus: 1. $a^2 - b^2 = l^2$, c und α (γ, h, t, h', r). 2. $a^2 - b^2$, $p - q$ und α (γ, h, h').

Übungen zu Abschnitt V. (Ähnliche Punktreihen.) § 7.

1) In jedem Trapez ist α) die Strecke, welche die Mittelpunkte der nicht parallelen Seiten verbindet, gleich der Summe, und β) die Strecke, welche die Mittelpunkte der Diagonalen verbindet, gleich der Differenz der beiden parallelen Seiten (Grundlinien). Andeutung. Die Mittelpunkte E, F, G, H (Fig. 40) der nicht parallelen Seiten und der Diagonalen liegen auf der Halbierungslinie des von den Parallelen gebildeten Streifens (§ 1, Üb. 19 a). Man hat nach § 40 β für α) $EG = \frac{1}{2}AB$, $GH = \frac{1}{2}DC$ u. s. w. Für β) hat man $EG = \frac{1}{2}AB$, $EF = \frac{1}{2}DC$ u. s. w.

2) Die Mittelpunkte der Seiten eines Vierecks sind die Ecken eines Parallelogramms. Die Seiten des Parallelogramms sind den Diagonalen des Vierecks parallel und die Hälften dieser Diagonalen.

3) Vier Punkte bestimmen drei einfache Vierecke. Man kommt also durch 2) zu drei Parallelogrammen. Je zwei derselben haben eine Diagonale gemein. Daraus folgt, dafs alle drei Parallelogramme den Mittelpunkt gemein haben (die entstehende Figur stellt, wenn man sie als schiefwinklige Parallelprojektion betrachtet [Stereometrie § 25 u. 26] ein Tetraeder und das Oktaeder vor, dessen Hemieder jenes Tetraeder ist.

4) Was ist von dem Parallelogramm in Üb. 2 zu sagen, wenn das Viereck ein Deltoïd (ein Rhombus) und ein gleichschenkliges Trapez (ein Rechteck) ist?

5) α) Eine Strecke zu konstruieren, von der eine gegebene Strecke $^5/_9$ ist.

β) Eine Strecke zu konstruieren, welche zu einer gegebenen Strecke in dem Verhältnis $2\frac{1}{3} : 4\frac{3}{4}$ steht.

6) Wenn a, b, c, m, n gegebene Längenzahlen sind, so soll man α) eine Strecke x so konstruieren, dafs $x = \frac{a \times b}{m}$ (§ 42 b) und β) eine Strecke y so konstruieren, dafs $y = \frac{a \times b \times c}{n \times m}$. (Benutze α.)

7) Zwei Strecken zu zeichnen, wenn gegeben ist:

α) die Summe und das Verhältnis derselben,

β) die Differenz und das Verhältnis derselben (§ 42 c).

8) Eine gegebene Strecke in drei Teile x, y, z zu teilen, so dafs sich verhält:

$$x : y = n : p,$$
$$y : z = q : r.$$

9) α) Aus dem Verhältnis $a : b = m : n$ zweier Strecken und der einen derselben $a = l$ läfst sich die andere als vierte Proportionale finden. Konstruiere ein Dreieck aus: 1. $a : b = m : n$, $a = l$ und α (γ, h, $p - q$, $\alpha - \beta$, r, t). 2. $a : b = m : n$, β und h (p, r). 3. $a : b : c = 5 : 6 : 7$ und $a = 8$ cm. 4. $a : b = 7 : 8$, $b : c = 10 : 11$ und $a = 9$ cm.

β) In diesen Aufgaben kann das Verhältnis $a : b$ auch durch das Verhältnis $h' : h''$ gegeben sein; denn aus $a \,.\, h' = b \,.\, h'' = 2\omega$ folgt $a : b = h'' : h'$.

γ) Aus der Summe oder Differenz zweier Strecken $a \pm b = s$ und ihrem Verhältnis $a : b = m : n$ kann man diese Strecken konstruieren (Teilung von s nach $m : n$) oder berechnen. — Konstruiere ein Dreieck aus: 1. $a \pm b = s$, $a : b = m : n$ und h ($h + p$). 2. $c = l$, $p : q = m : n$ und γ (m, $a + h$). 3. $a : b = m : n$, $h_a + h_b = s$ und c. In diesen Aufgaben kann man die gegebene Gröfse $a : b$ auch durch das gegebene Verhältnis der Höhen ersetzen: $a : b = h'' : h$.

δ) Ein Dreieck zu konstruieren aus $a : b = m : n$, c und $h\,(w,\ t,\ p - q,\ p : q)$.

ε) Konstruiere ein Dreieck aus t', t'' und $c\,(a,\ h,\ t''' \measuredangle ct')$.

ζ) Ein Dreieck zu konstruieren aus: 1. $a : b$, c, $\measuredangle t't''$. 2 c, $a : b$, $t' : t''$. 3. c, r, $t' : t''$. 4. c, $a : t'$, $b : t''$. — Verlängere c beiderseits um sich selbst. — Hilfsdreieck mit den Seiten $3c$, $2t'$, $2t''$.

10) Jede durch den Winkelscheitel gezogene Gerade teilt alle diejenigen Strecken nach demselben Verhältnis, welche zu einander parallel in den Winkel eingelegt sind. Andeutung. (Fig. 41.) $r : r' = s : s'$, weil beide Verhältnisse $= AD : AD'$ sind. Vertausche die mittleren Glieder.

11) In einem Winkel seien parallele Strecken eingelegt. Der geometrische Ort aller Punkte, welche diese Strecken innen und aufsen nach dem Verhältnis $r : s$ teilen, besteht aus zwei durch den Scheitel gezogenen Geraden.

12) Eine Mittellinie im Dreieck halbiert alle Strecken, welche parallel zur entsprechenden Seite in das Dreieck eingelegt werden.

13) Eine Diagonale im Parallelogramm halbiert alle Strecken, welche parallel zur andern Diagonale in das Parallelogramm eingelegt sind.

14) α) Die Mittelpunkte (N, O in Fig. 42) zweier Höhenabschnitte, welche von den Ecken des Dreiecks bis zu dem Schnittpunkte (H) der Höhen (§ 2, Üb. 68) reichen (obere Höhenabschnitte), bilden mit den Mittelpunkten der diesen Höhen zugehörigen Seiten ein Rechteck.

β) Die Fufspunkte der beiden Höhen liegen auf demjenigen Kreise, welcher um das Rechteck beschrieben ist.

15) Die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte, die Fufspunkte der Höhen und die Mittelpunkte der Dreiecksseiten liegen auf einem Kreise (Feuerbachscher Kreis). Andeutung. Die dem Eckpunkte A und der Seite BC zugeordneten Punkte N, A' A'' bestimmen einen Kreis. Nach Übung 14 liegen auf diesem Kreise auch die Punkte O, B', B'', welche in analoger Weise dem Eckpunkte B und der Seite AC zugeordnet sind. Ebenso wird gezeigt, dafs der Kreis auch durch die Punkte P, C', C'' geht. Mittelpunkt dieses Kreises ist der Schnittpunkt der Diagonalen im Rechteck $NOA'B'$.

16) Wenn man in den Punkten B, C . . . einer Geraden (Fig. 43) parallele Strecken b, c . . . anlegt, welche sich verhalten wie die Abstände der Punkte B, C . . . von A, so liegen die Endpunkte dieser Strecken auf einer durch A gehenden Geraden. Andeutung. Der Endpunkt von b heifse B'. Die Gerade AB' werde von dem Träger der Strecke c in C' getroffen. Dann hat

man nach § 41 c) $AB : AC = b : CC'$, und nach der Voraussetzung $AB : AC = b : c$. Folglich ist $CC' = c$ und C' der Endpunkt der Strecke c. Ebenso zeigt man, dafs die Endpunkte der übrigen Strecken auf der Geraden AB' liegen.

17) a, b seien zwei gegebene Gröfsen. Die Gröfse x heifst das harmonische Mittel zwischen a und b, wenn $a - x : x - b = a : b$, oder wenn $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$. Man beweise, dafs in der Figur 83 auf Seite 47 der Abstand CD zweier zugeordneter Punkte das harmonische Mittel zwischen AD und BD ist. Andeutung. Die Proportion $AD - CD : CD - BD = AD : BD$ ist mit der andern $CA : CB = DA : DB$, welche die harmonische Punktgruppe definiert, identisch.

18) α) Verbindet man irgend einen Punkt auf der Peripherie eines Kreises mit den Endpunkten eines Durchmessers, so teilen diese Linien jede zu dem Durchmesser senkrechte Sehne harmonisch.

β) Verbindet man irgend einen Punkt auf der Peripherie eines Kreises mit den Endpunkten einer Sehne, so wird der zu dieser Sehne senkrechte Durchmesser harmonisch geteilt.

19) a und b (Fig. 44) seien zwei Gerade und c eine dritte durch den Schnittpunkt von a und b gezogene Gerade. Für jeden Punkt von c hat das Verhältnis der (senkrechten) Abstände von a und b denselben Wert $r : s$. (Verfahre beim Beweis gerade wie in Übung 10.)

20) Für keinen andern Punkt innerhalb eines der von c durchzogenen Scheitelwinkel hat das Abstandsverhältnis von a und b denselben Wert $r : s$. Andeutung. (Fig. 44.) Ziehe durch N eine Parallele zu a, welche c in M trifft. Dann ist $NU = MP$, aber NV von MQ verschieden. Deshalb kann $NU : NV$ nicht gleich $MP : MQ$ sein.

21) Das Verhältnis $r : s$ sei gegeben. Man soll die Gerade c bestimmen. Andeutung. Errichte irgendwo auf a die Strecke r und auf b die Strecke s senkrecht. Ziehe durch die Endpunkte Parallelen bezüglich zu a und b. Sie schneiden sich in einem Punkte der Geraden c.

22) Man kann nach 21) noch eine zweite Gerade c' bestimmen, welche die Nebenwinkel der von c durchzogenen Winkel teilt und deren Punkte ebenfalls das Verhältnis $r : s$ der Abstände von a und b haben.

23) Der geometrische Ort aller Punkte, für welche das Verhältnis ihrer Abstände von zwei konvergenten Geraden a und b denselben Wert $r : s$ hat, besteht aus zwei durch den Schnittpunkt von a und b gezogenen Geraden.

24) Gerade Linien zu finden, deren Abstände von den Punkten A und B sich wie $r : s$ verhalten. Andeutung. Alle Geraden dieser Art bilden zwei Strahlenbüschel, deren Scheitel C und D diejenigen Punkte sind, welche den Abstand AB innen und aufsen nach dem Verhältnis $r : s$ teilen.

25) Auf einer Geraden g einen Punkt P zu suchen, für welchen α) das Verhältnis der Abstände von zwei Geraden a und b, β) das Verhältnis der Abstände von zwei Punkten A und B einen gegebenen Wert hat. (Jedesmal zwei Auflösungen. Vergleiche für α) Üb. 23 und für β) den Satz 46 a.)

26) Durch einen Punkt P eine Gerade g zu ziehen, für welche das Verhältnis der Abstände von den Punkten A und B einen gegebenen Wert $r : s$ hat. (Zwei Auflösungen, siehe Übung 24.)

27) α) Einen Punkt P anzugeben, dessen Abstände von drei Geraden a, b, c (die sich nicht in einem Punkte schneiden) sich wie $r : s : p$ verhalten. Andeutung. (Fig. 45.) Ziehe durch den Schnittpunkt von a und b die beiden Geraden c' und c'' als Ort der Punkte, deren Abstände von a und b sich wie $r : s$ verhalten. Ziehe ferner durch den Schnittpunkt von a und c die Geraden b' und b'' als Ort der Punkte, deren Abstände von a und c sich wie $r : p$ verhalten. Die Geraden c', c'', b', b'' liefern die Schnittpunkte P', P'', P''', P^{IV}, deren Abstände von a, b, c sich offenbar wie $r : s : p$ verhalten. Zieht man noch durch den Schnittpunkt von b und c die Geraden a', a'' als Ort der Punkte, deren Abstände von b und c sich wie $s : p$ verhalten, so mufs jeder der vier Punkte P' bis P^{IV} noch auf einer der Geraden a' a'' liegen (Üb. 23). Diese vier Punkte P', P'', P''', P^{IV} bilden also die Ecken eines vollständigen Vierecks, dessen Seiten die Geraden a', a'', b', b'', c', c'' sind. Die Ecken des von den gegebenen Geraden bestimmten Dreiseits sind Nebenecken in jenem vollständigen Viereck. Man kann also sagen, dafs die Abstände jedes Eckpunktes dieses vollständigen Vierecks von den Geraden, welche die Nebenecken verbinden, sich wie $r : s : p$ verhalten.

28) Eine Gerade zu bestimmen, deren Abstände von drei Punkten A, B, C (die nicht auf einer Geraden liegen) sich wie $r : s : p$ verhalten. Andeutung. Bestimme die Punkts C', C'' (Fig. 46), welche die Strecke AB innen und aufsen nach dem Verhältnis $r : s$ teilen. C' und C'' sind Scheitel zweier Strahlenbüschel, deren Strahlen die Eigenschaft haben, dafs ihre Abstände von A und B sich wie $r : s$ verhalten (Üb. 24). Bestimme auch die Punkte B' und B'', welche die Strecke AC innen und aufsen nach dem Verhältnis $r : p$ teilen. B' und B'' sind Scheitel zweier Strahlbüschel, deren Strahlen die Eigenschaft haben, dafs ihre Abstände von A und C sich wie $r : p$ verhalten. Durch Ver-

bindung der vier Punkte C', C'', B', B'' erhält man die Geraden g' g'', g''', g^{IV}, deren Abstände von A, B, C sich wie $r : s : p$ verhalten. Nach Übung 24 mufs jede dieser Geraden durch einen der Punkte A', A'' gehen, welche die Strecke BC innen und aufsen nach dem Verhältnis $s : p$ teilen. Die vier Geraden g', g'', g''', g^{IV} sind also die Seiten eines vollständigen Vierseits mit den Ecken C', C'', B', B'', A', A''. Die gegebenen Punkte A, B, C sind die Ecken des durch die Diagonalen des Vierseits gebildeten Dreiecks. Die Abstände einer jeden Seite dieses vollständigen Vierseits von A, B, C verhalten sich wie $r : s : p$.

29) Einen Punkt zu bestimmen, dessen Abstände von A, B, C (Fig. 46) sich wie $r : s : p$ verhalten. Andeutung. Über C', C'' (C', C'' sind die schon in Übung 28 bestimmten Punkte) als Durchmesser ziehe einen Kreis als Ort der Punkte, deren Abstände von A und B sich wie $r : s$ verhalten (§ 46 a). Ziehe auch über $B'B''$ als Durchmesser einen Kreis, als Ort der Punkte, deren Abstände von A und C sich wie $r : p$ verhalten. Wenn sich die Kreise schneiden, so hat man zwei Punkte P', P'' gefunden, deren Abstände von A, B, C sich wie $r : s : p$ verhalten. Nach § 46 a) müssen diese Punkte auch auf dem Kreise liegen, der über $A'A''$ als Durchmesser gezogen ist. Die Durchmesser der drei Kreise, welche durch die Punkte P', P'' gehen, sind die auf den Diagonalen des Vierseits gelegenen Abstände gegenüberliegender Ecken.

30) Innerhalb eines Winkels CAB (Fig. 106 auf Seite 61) ist Punkt D gegeben; durch ihn soll die Gerade BC so gezogen werden, dafs α) $DB : DC = m : n$, β) $DB : BC = m : n$, γ) $AB : AC = m : n$.

31) Konstruiere ein Dreieck aus 1) $a : b = m : n$, $a = l$ und α (γ, h, $p - q$, $\alpha - \beta$, r, t). 2) $a : b = m : n$, β und h (p, r). 3) $a : b : c = 5 : 6 : 7$ und $a = 8$ cm. 4) $a : b = 7 : 8$, $b : c = 10 : 11$ und $a = 9$ cm.

32) In diesen Aufgaben kann das Verhältnis $a : b$ auch durch $h' : h''$ gegeben sein; denn aus $a \,.\, h' = b \,.\, h'' = 2\,\omega$ folgt: $a : b = h'' : h'$.

33) Wenn $h' : h'' : h''' = m : n : o$, so sollen die Verhältnisse der Seiten bestimmt werden $\left(a : b : c = \frac{1}{m} : \frac{1}{n} : \frac{1}{o}\right)$.

34) Konstruiere ein Dreieck aus 1) $a \pm b = s$, $a : b = m : n$ und h ($h + p$). 2) $c = l$, $p : q = m : n$ und γ (t, $a + h$). 3) $a : b = m : n$, $h' + h'' = s$ und c.

35) In 34 ersetze $a : b$ durch $h' : h'' = m : n$.

36) Ein Dreieck zu konstruieren aus $a : b = m : n$, c und h (w, t, $p - q$, $p : q$).

37) Ein Dreieck zu konstruieren aus $a : b = m : n = 2 : 3$ (oder $h' : h'' = 3 : 2$) und t. Zwischen welchen Zahlen mufs der Wert von t angenommen werden, damit die beiden in Betracht kommenden Örter gemeinsame Punkte haben? Antwort:

$$t < \frac{c}{2} \cdot \frac{n+m}{n-m} \quad \text{und} \quad t > \frac{c}{2} \cdot \frac{n-m}{n+m}.$$

38) In Figur 85 auf Seite 48 DC parallel AB so zu ziehen, dafs 1) $AB : DC = m : n$. 2) $OD : DC = DC : AB$. 3) $OD : DC = DC : OB$. 4) $DC : AD = OC : AB$. 5) $AD : AB = BC : DB$.

39) Konstruiere ein Dreieck aus t', t'' und c $(a,\ t,\ \sphericalangle\, ct')$.

Übungen zu Abschnitt VI (Ähnlichkeit der Figuren). § 8.

1) Gleichschenklige Dreiecke sind ähnlich, α) wenn der Winkel an der Spitze, β) wenn das Verhältnis von Grundlinie und Schenkel in beiden gleich ist.

2) Rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie α) einen spitzen Winkel, β) das Verhältnis der Katheten, γ) das Verhältnis der Hypotenuse zu einer Kathete entsprechend gleich haben.

3) Beweise, dafs die folgenden Linien zwei ähnliche Dreiecke in Teildreiecke zerlegen, welche wiederum paarweise ähnlich sind: α) entsprechende Höhen, β) entsprechende Mittellinien, γ) entsprechende Winkelhalbierende, δ) die Radien der umbeschriebenen Kreise, ε) die Radien der einbeschriebenen Kreise (nach den Berührungspunkten).

4) In ähnlichen Dreiecken verhalten sich wie entsprechende Seiten: α) entsprechende Transversalen, Radien der einbeschriebenen und umbeschriebenen Kreise, β) Summen und Differenzen aus solchen Strecken. Anleitung zum Beweis von β: Aus $a : a' = t : t' = r : r = m$ folgt $a = m.a'$, $t = m.t'$, $r = m.r'$; $a + t = r = m\,(a' + t' + r')$, $(a + t + r) : (a' + t' + r') = m = a : a'$. t' bedeutet hier die t entsprechende Mittellinie des zweiten Dreiecks.

5) Konstruiere eines der unendlich vielen Dreiecke, welche möglich sind, wenn gegeben ist: 1) $a : h$ und $\alpha\,(\gamma,\ \alpha - \beta)$. 2) $h : p$ und $\alpha\,(\gamma,\ \alpha - \beta)$. 3) $(a \pm b) : c$ und α. 4) $c : h$ und γ. 5) $a : b : h$. 6) $t : h : c$. 7) $c : h' : h''$.

6) Ähnlichkeitsmethode: Wenn bei einer Konstruktionsaufgabe (z. B. Dreieck aus α, β, $c + h = l$) nach Ausscheidung einer Längenangabe $(c + h = l)$ die übrigen Bedingungen durch eine der gesuchten Figur F ähnliche Figur F' erfüllt werden, so konstruiere man F'. Findet man, dafs diejenige Länge, welche

in der gesuchten Figur gleich l sein soll ($c + h = l$) in F' die Gröfse l' hat ($c' + h' = l'$), so hat man nur F ähnlich F' so zu zeichnen, dafs zwei entsprechende Seiten sich wie $l : l'$ verhalten ($a : a' = l : l'$) und die ausgeschiedene Bedingung wird nun auch erfüllt sein. Beweis: $c + h : c' + h' = a : a'$ (Üb. 4) $= l : l'$ (nach Konstruktion); da aber $c' + h' = l'$ (Eigenschaft der Hilfsfigur), so folgt $c + h = l$.

7) Dreiecke zu konstruieren aus den Bedingungen einer der Aufgaben in Übung 5 und einem der folgenden Stücke: 1. t', 2. w''', 3. r, 4. ϱ, 5. $a + c$, 6. $c + h$, 7. $a + t'$, 8. $r + \varrho$, 9. $h' + h'' + h'''$.

Konstruiere ein Viereck aus:

8) $a : b$, β und c, d, e; (e, f, ε; c, α, γ; f, α, ε; c, δ, ε).

9) $a : b : c$, α, β, d.

10) $a : b : c$, e, β, δ.

11) Dem Punkte A, welcher eine Strecke der Figur F nach einem gegebenen Verhältnis innen (aufsen) teilt, entspricht in der ähnlichen Figur F' ein Punkt A', welcher die homologe Strecke innen (aufsen) nach demselben Verhältnis teilt. Sind F und F' perspektivisch gelegen, so geht die Gerade AA' durch den Ähnlichkeitspunkt. Die parallelen Seiten eines Trapezes können z. B. als ähnliche Figuren in perspektivischer Lage betrachtet werden, so dafs der Schnittpunkt der konvergenten Seiten oder der Schnittpunkt der Diagonalen den Ähnlichkeitspunkt vorstellt. Die Mittelpunkte der parallelen Seiten entsprechen sich für diese beiden Ähnlichkeitspunkte, folglich geht ihre Verbindungslinie durch diese Ähnlichkeitspunkte.

12) Dem Schnittpunkte A zweier Diagonalen in dem Vieleck F entspricht der Schnittpunkt A' der homologen Diagonalen in dem ähnlichen Vieleck F'. Liegen F und F' perspektivisch, so geht AA' durch den Ähnlichkeitspunkt.

13) Ähnliche Figuren in perspektivischer Lage sind durch den Ähnlichkeitspunkt und zwei parallele Geraden als entsprechende Strahlen bestimmt. Man soll zu irgend einem weitern Punkte B den entsprechenden suchen.

14) Dafs die entsprechenden Winkel von ähnlichen Figuren in perspektivischer Lage immer gleichen Sinnes sind, erkennt man sofort, wenn die Figuren einen äufseren Ähnlichkeitspunkt haben. Haben aber die beiden Figuren einen inneren Ähnlichkeitspunkt S, so gebe man der einen eine halbe Umdrehung um diesen Ähnlichkeitspunkt. Diese Drehung hat den Sinn der Winkel nicht verändert. Da aber nunmehr S ein äufserer Ähnlichkeitspunkt ist, so erkennt man, dafs je zwei entsprechende Winkel gleichen Sinnes sind.

15) Die entsprechenden Dreiecke ähnlicher Figuren sind immer gleichen Sinnes, wenn diese Figuren in perspektivischer Lage sind (Üb. 14). Wendet man die eine Figur um, so hat man ähnliche Figuren in schiefer Lage, bei welchen je zwei entsprechende Dreiecke verschiedenen Sinnes sind. Siehe die Anmerkung unter der Seite.

16) Zwei Figuren (Vielecke) sind ähnlich, wenn zwei Punkte (A und B) der einen Figur mit den übrigen Punkten ($CDE..$) derselben Figur Dreiecke bilden, welche den entsprechenden Dreiecken der andern Figur ähnlich sind*). Andeutung. Die Dreiecke ABC, ABD, ABE (Fig. 47) seien bezüglich den Dreiecken $A'B'C'$, $A'B'D'$, $A'B'E'$ ähnlich. Wegen der Gleichheit entsprechender Winkel können die Vielstrahlen A und A' zur Deckung gebracht werden, und der gemeinsame Scheitel heifse S. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt nach § 48 b) $SB : SB' = SC : SC' = SD : SD' = SE : SE'$. Die Figuren sind also nach der Definition in § 47 a) ähnlich.

17) In § 48 c ist gezeigt worden, wie zwei ähnliche Figuren durch Aufsuchen von Paaren entsprechender Punkte vervollständigt werden können, wenn zwei Paare entsprechender Punkte oder zwei entsprechende Strecken AB und $A'B'$ der Lage nach gegeben sind. Aus der zweiten Konstruktion in § 48 c geht hervor, dafs nur eine Figur $A'B'..$ besteht, welche der Figur $AB..$ ähnlich ist. Man kommt also immer auf diese eine Figur, sei es, dafs man in der ersten Konstruktion die Punkte A, A' vereint, oder dafs man B und B', C und C' u. s. w. in einen Punkt (Ähnlichkeitspunkt) zusammenfallen läfst.

18) Zwei ähnliche Figuren gleichen Sinnes liegen perspektivisch, wenn zwei entsprechende Seiten parallel sind. Andeutung. (Fig. 48.) Der Schnittpunkt S von AA' und BB' entspricht in beiden Figuren sich selbst, weil die Dreiecke ASB und $A'SB'$ ähnlich sind. Dem Winkel ASC entspricht in der zweiten Figur ein Winkel von demselben Sinne und derselben Gröfse. Da die Anfangsschenkel zusammenfallen, so thun dies auch die Endschenkel SC und SC', das heifst der zu C homologe Punkt C' liegt auf SC.

19) Durch einen Punkt C (Fig. 49) eine Gerade nach dem unzugänglichen Schnittpunkte der Geraden a und b zu ziehen. Andeutung. Zeichne das Dreieck CAB (A und B willkürlich auf a und b). Ziehe durch einen Punkt A' von a die Gerade

*) Entweder müssen je zwei entsprechende Dreiecke gleichen, oder je zwei entsprechende Dreiecke entgegengesetzten Sinnes sein. Im letzten Falle mufs man zur Herstellung der perspektivischen Lage die eine Figur umkehren.

$A'B' \parallel AB$. Mache nach § 49 a) das Dreieck $A'B'C'$ ähnlich ABC, so ist CC' die gesuchte Gerade.

20) Mit einer gegebenen Richtung c (Fig. 50) parallel eine Gerade nach dem unzugänglichen Schnittpunkte der Geraden a und b zu ziehen. Andeutung. Ziehe durch einen Punkt S von a die Strahlen SD und SG. Zeichne das Dreieck ADG, welches eine Seite auf c (oder mit c parallel) hat. Bestimme den Schnittpunkt D', ziehe $D'G' \parallel DG$ und ziehe durch G' den Strahl d parallel mit GA. d geht durch den gesuchten Punkt A'.

21) In einem Vierecke (Fig. 51) sind nur zwei Gegenpunkte A und C zugänglich, man soll die zweite Diagonale ziehen. Andeutung. Zeichne die Diagonale AC und mit ihrer Hilfe das Viereck $AB'C'D'$ ähnlich dem gegebenen. Ziehe die Diagonale $B'D'$ und bestimme die homologe Gerade der andern Figur. Hierzu ziehe $O'E'$ und $C'E'$ (E' beliebig auf AD'), ziehe auch $CE \parallel E'E'$ und $EO \parallel E'O'$. O ist ein Punkt der gesuchten Diagonale.

22) Die Ecken eines Vierecks sind sämtlich unzugänglich. Man soll die Diagonalen ziehen. Andeutung. Man nehme auf den Seiten a, b, c, d vier Punkte A, B, C, D an und zeichne ein ähnliches Viereck A, B', C', D', so dafs A der Ähnlichkeitspunkt beider Vielecke wird. Zieht man nun durch B', C', D' Parallele mit b, c, d, so hat man ein mit dem gegebenen ähnliches Viereck und kann wie in 21 verfahren.

23) In jedem Dreieck liegt der Schnittpunkt H (Fig. 52) der Höhen, der Schwerpunkt S und der Mittelpunkt M des umbeschriebenen Kreises in gerader Linie. Der Schwerpunkt teilt den Abstand der übrigen Punkte nach dem Verhältnisse 2 : 1. (Lehrsatz von Euler.) Andeutung. Die Endpunkte A, B der Grundlinie mit dem Schnittpunkte H der Höhen einerseits und die Mitten A', B' der übrigen Seiten mit dem Mittelpunkte M des umbeschriebenen Kreises andererseits bilden ähnliche Dreiecke in perspektivischer Lage. Ihr Ähnlichkeitspunkt ist der Schwerpunkt S.

24) Der auf einer Höhe eines Dreiecks gemessene Abschnitt von einem Eckpunkte bis zum Schnittpunkte der Höhen (oberer Höhenabschnitt) ist doppelt so grofs, als der Abstand der gegenüberliegenden Seite von dem Mittelpunkte des umbeschriebenen Kreises.

25) Der Mittelpunkt F des Feuerbachschen Kreises (§ 7, Üb. 15, Fig. 42) halbiert den Abstand zwischen dem Schnittpunkte H der Höhen und dem Mittelpunkte M des umgeschriebenen Kreises (M ist in Fig. 42 nicht gezeichnet). Andeutung. Die Mittelpunkte N, O zweier oberen Höhenabschnitte mit dem Schnittpunkte H der Höhen einerseits und die Mittelpunkte $A'B'$ der diesen Höhen zugehörigen Seiten mit dem Mittelpunkte M des

umbeschriebenen Kreises andererseits, bilden ähnliche Dreiecke in perspektivischer Lage. Ihr Ähnlichkeitspunkt ist der Mittelpunkt F des Feuerbach'schen Kreises.

26) Wenn zwei Kreise sich von innen oder von aufsen berühren, so ist ihr Berührungspunkt bezüglich äufserer oder innerer Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise. Andeutung. Der Ähnlichkeitspunkt teilt den Centralabstand nach dem Verhältnis der Radien.

27) Wenn der Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise auf einem dieser Kreise liegt, so berühren sich die Kreise in diesem Punkte. Andeutung. Der Centralabstand CC' wird im Ähnlichkeitspunkte S nach dem Verhältnis der Radien r und r' geteilt. Wenn SC gleich r ist, so mufs SC' gleich r' sein, d. h. S mufs auf dem Kreise mit dem Mittelpunkte C' liegen.

28) Die Ähnlichkeitspunkte teilen den Centralabstand harmonisch.

29) Für zwei Kreise als ähnliche Figuren gelten folgende Beziehungen:

α) Die Mittelpunkte entsprechen sich für beide Ähnlichkeitspunkte;

β) die Centrale entspricht sich selbst (Ähnlichkeitsstrahl) für beide Ähnlichkeitspunkte;

γ) parallele Radien, ihre Endpunkte und die Tangenten in denselben (siehe § 50 c) entsprechen sich entweder für den äufsern oder für den innern Ähnlichkeitspunkt;

δ) parallele Tangenten entsprechen sich für den äufsern oder für den innern Ähnlichkeitspunkt (ihre Radien sind auch parallel. Siehe γ);

ε) wenn ein Ähnlichkeitsstrahl den einen Kreis schneidet, so schneidet er auch den andern. Auf einem solchen Ähnlichkeitsstrahle liegen zwei Paare entsprechender Punkte;

ζ) wenn ein Ähnlichkeitsstrahl einen Kreis berührt, so berührt er auch den andern. Die Berührungspunkte entsprechen sich. Andeutung. ε) und ζ) folgen aus § 50 c), wenn man bedenkt, dafs der Ähnlichkeitsstrahl sich selbst entspricht.

30) Es ist ein Kreis k gegeben. Man soll einen Kreis k' zeichnen, so dafs die beiden Kreise einen gegebenen Punkt S zum Ähnlichkeitspunkte haben und aufserdem

α) zwei gegebene Punkte A und A' eines Ähnlichkeitsstrahles sich in den ähnlichen Systemen beider Kreise entsprechen;

β) zwei gegebene parallele Geraden sich in den ähnlichen Systemen beider Kreise entsprechen (auf α zurückzuführen);

γ) der Radius des Kreises k' eine gegebene Länge habe (zwei Lösungen);

δ) der Mittelpunkt von k' auf einer gegebenen Geraden liege.

31) Man soll einen Kreis k' zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis k berührt, so daſs

α) zwei gegebene Punkte A, A' in den ähnlichen Systemen beider Kreise sich entsprechen;

β) zwei gegebene Gerade in dem System des einen Kreises zweien bezüglich parallelen Geraden im System des andern Kreises entsprechen. (Je zwei Auflösungen.)

Andeutung. α) Nimm einen Schnittpunkt S von AA' mit k als Ähnlichkeitspunkt an (Üb. 26 u. 27). Schneide CS (C Mittelpunkt von k) mit der durch A' zu AC gezogenen Parallelen. β) wird auf α) zurückgeführt.

32) Es ist ein Kreis k (Fig. 53) und eine Gerade a' gegeben. Man soll einen Kreis k' zeichnen, welcher a' in einem bestimmten Punkte A' und auſserdem k berührt. Analysis. Der Tangente a' an k' muſs eine zu a' parallele Tangente (Berührungspunkt A) des Kreises k entsprechen. AA' ist ein Ähnlichkeitsstrahl. Der gesuchte Berührungspunkt S muſs Ähnlichkeitspunkt sein (Üb. 26) und daher auf AA' und k zugleich liegen. Die Konstruktion spreche man selbst aus. Man erhält zwei Lösungen, weil zwei zu a' parallele Tangenten an k gelegt werden können. Beweis. S als Ähnlichkeitspunkt und AA' als entsprechende Punkte bestimmen zwei ähnliche Systeme in perspektivischer Lage, in welchen sich auch a und a' entsprechen. Dem Kreise k, welcher a in A berührt, entspricht ein Kreis k', welcher a' in A' berührt (§ 50 a u. c). Weil der Ähnlichkeitspunkt S auf k liegt, berühren sich die Kreise in S.

33) Ein Kreis k (Fig. 54) und zwei konvergente Gerade a', b' sind gegeben. Einen Kreis k' zu konstruieren, welcher k, a', b' berührt. Analysis. Die Tangenten a' und b' an k' müssen zwei bezüglich zu ihnen parallelen Tangenten a und b des Kreises k entsprechen. Der Schnittpunkt D' von a' und b' entspricht dem Schnittpunkte D von a und b. Der gesuchte Berührungspunkt S muſs Ähnlichkeitspunkt sein, also auf k und DD' zugleich liegen. Die Konstruktion spreche man selbst aus. Hat man die Tangenten a und b gewählt, so erhält man noch zwei Lösungen, weil DD' den Kreis k in zwei Punkten trifft. Aus den zu a' oder b' parallelen Tangenten an k kann man aber a und b auf vier verschiedene Arten wählen. Also acht Lösungen, von denen einzelne wegfallen können, wenn k von den Linien DD' nicht getroffen wird. Beweis. S als Ähnlichkeitspunkt und D, D' als entsprechende Punkte bestimmen zwei ähnliche Systeme, in welchen a und a', b und b' sich entsprechen. Dem Kreise k, welcher a und b berührt, entspricht ein Kreis, welcher

a' und b' berührt (§ 50 a und c). Die Kreise k und k' berühren sich in dem auf k liegenden Ähnlichkeitspunkte (Üb. 27).

34) Ein Kreis k und zwei Gerade a' und b' seien gegeben. Man soll einen Kreis k' zeichnen, welcher seinen Mittelpunkt auf a' hat und b' berührt. Andeutung. Der Geraden b', welche k' berührt, entspricht eine mit b' parallele Tangente b des Kreises k. Dem Durchmesser a' von k' entspricht ein dazu paralleler Durchmesser a von k. Dem Schnittpunkte D' von a' und b' entspricht der Schnittpunkt D von a und b. DD' schneidet den Kreis k in dem gesuchten Berührungspunkte u. s. w. (Vier Lösungen.)

35) Zwei Schnittkreise, welche gleiche Radien haben, bestimmen zu beiden Seiten der Centralen zwei Spitzbogen. Man soll in einem solchen Spitzbogen einen Kreis beschreiben, welcher die Grundlinie und die Seiten des Spitzbogens berührt. Andeutung. Der Mittelpunkt der Grundlinie ist Berührungspunkt. Benütze Übung 32.

36) Einen Kreis zu zeichnen, welcher die Radien und den Bogen eines Kreisausschnittes berührt. Andeutung. Der Berührungspunkt mit dem gegebenen Kreise liegt in der Mitte des Bogens. Die Berührungspunkte mit den beiden Radien findet man durch Tangenten, welche mit den Radien parallel an den gegebenen Kreis gezogen sind.

37) In einen Spitzbogen zwei Kreise einzuzeichnen, von welchen jeder die Grundlinie, die Höhe und die eine Seite berührt (Übung 33).

38) In einen Kreis vier Kreise zu zeichnen, welche den gegebenen Kreis und zwei auf einander senkrechte Durchmesser berühren (Übung 36).

Übungen zu Abschnitt VI. (Zweite Folge.) § 9.

1) In jedem Dreieck ist das Produkt aus zwei Seiten gleich dem Produkte aus der Höhe zur dritten Seite und dem Durchmesser des umbeschriebenen Kreises: $a \,.\, b = d \,.\, h'''$ (Fig. 55). Andeutung. Die Dreiecke ACD und EBC sind ähnlich.

2) Das Quadrat über einer Winkelhalbierenden (Strecke vom Scheitel bis zum Schnitt mit der Gegenseite) ist gleich dem Produkte aus den einschließenden Seiten, vermindert um das Produkt aus den beiden Abschnitten der Gegenseite: $w'''^2 = a \,.\, b - u \,.\, v$ (Fig. 56). Andeutung. Die Dreiecke ADC und EBC sind ähnlich und man hat: $b : w''' = (w''' + z) : a$; $w'''^2 + w''' \,.\, z = b \,.\, a$. Da nun (§ 52 a) $w''' \,.\, z = u \,.\, v$, so ergiebt sich $w'^2 = b \,.\, a - u \,.\, v$.

3) Eine Winkelhalbierende (w''') durch die drei Seiten auszudrücken. Andeutung. Aus $u : v = a : b$ und $u + v = c$ ergiebt sich $u \,.\, v = \frac{c^2 \,.\, a \,.\, b}{(a+b)^2}$ und durch Einsetzen (Übung 2) $w'''^2 = b \,.\, a - \frac{c^2 \,.\, a \,.\, b}{(a+b)^2}$. Durch Umformung kann man noch auf $w'''^2 = \frac{a \,.\, b}{(a+b)^2}\,(a+b+c)\,(a+b-c)$ kommen.

4) Im rechtwinkligen Dreieck $w''' = \frac{a \,.\, b \,.\, \sqrt{2}}{a+b}$.

5) Den Radius des umbeschriebenen Kreises durch die drei Seiten des Dreiecks auszudrücken. Andeutung. Nach Übung 1 ist $a \,.\, b = d \,.\, h'''$ und $a \,.\, b \,.\, c = d \,.\, c \,.\, h'''$, d. h. $\frac{a \,.\, b \,.\, c}{2} = d \,.\, \omega$;

$$\omega = \frac{a \,.\, b \,.\, c}{2\,d} = \frac{a \,.\, b \,.\, c}{4\,r};\quad r = \frac{a \,.\, b \,.\, c}{4\,\omega} = \frac{a \,.\, b \,.\, c}{4 \,.\, \sqrt{s \,.\, (s-a)\,(s-b)\,(s-c)}}.$$

6) Die Abschnitte, in welche die Grundlinie eines Dreiecks durch die Höhe geteilt wird, bilden die äußeren Glieder einer Proportion, deren innere Glieder durch die zugehörige Höhe und denjenigen Abschnitt derselben, welcher von der Grundlinie bis zum Schnittpunkte der drei Höhen reicht, gebildet werden. Andeutung. (Fig. 42.) Die Dreiecke $AC''H$ und $CC''B$ sind ähnlich (siehe § 2, Übung 66).

7) In jedem Kreisvierecke ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der beiden Paare der gegenüberliegenden Seiten (Ptolemäischer Lehrsatz). Andeutung. (Fig. 57.) Mache den Winkel $ABF = CBD$. Aus der Gleichheit der in der Figur gleichbezeichneten Winkel ergiebt sich die Ähnlichkeit der Dreiecke AFB und DCB, sowie die Ähnlichkeit von CFB und DAB, und daraus die Proportionen: $AF : AB = DC : DB$ und $CF : CB = DA : DB$. Aus ihnen ergiebt sich: $AF = \frac{a \,.\, c}{g}$ und $CF = \frac{b \,.\, d}{g}$. Durch Addition folgt:

$$AF + CF = f = \frac{a \,.\, c}{g} + \frac{b \,.\, d}{g} \text{ oder } f \,.\, g = ac + bd.$$

8) Von einem gegebenen Dreieck $\triangle$ durch eine Parallele mit einer Seite ein Dreieck $\triangle'$ von gegebenem Umring u' abzuschneiden. Andeutung zur Konstruktion. Trage in der Richtung AB den Umring des Dreiecks ABC nach AD und den gegebenen Umring nach AE. Ziehe durch E die Parallele zu DC bis zum Schnitt mit AC.

9) Übung 8 durch Rechnung zu lösen α) wenn $a = 15$, $b = 20$, $c = 25$, $u' = 30$.

10) Die Flächen zweier Dreiecke verhalten sich wie 4 : 9.

Die Grundlinie des einen ist 2 cm gröfser als die des andern. Wie grofs sind beide Grundlinien?

11) Wenn man über den Seiten a, b, c (c die Hypotenuse) eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Dreiecke zeichnet, deren Flächen α, β, γ heifsen sollen, so ist $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Andeutung. $\alpha = p \cdot a^2$, $\beta = p \cdot b^2$, $\gamma = p \cdot c^2$ (§ 49 d). $\alpha + \beta = p\,(a^2 + b^2) = p \cdot c^2 = \gamma$ (vergl. § 38 a).

12) Ein Dreieck zu zeichnen, welches so grofs ist wie α) die Summe, β) die Differenz zweier ähnlichen Dreiecke.

13) Von dem Dreieck ABC (Fig. 58), dessen Fläche δ heifsen und dessen Seite AC gleich 6,25 sein soll, durch eine Parallele EF zur Grundlinie ein Dreieck mit der Fläche δ' abzuschneiden, wenn $\alpha)$ $\delta' = \frac{1}{4}\delta$, $\beta)$ $\delta' = \frac{1}{9}\delta$, $\gamma)$ $\delta = 40$, $\delta' = 22{,}4$.

14) Ein Dreieck durch eine Parallele mit der Grundlinie zu halbieren.

15) In einem rechtwinkligen Dreieck betragen die Abschnitte der Hypotenuse 5 cm und 7 cm. Man soll die Höhe und die Katheten berechnen.

16) Wie grofs ist die Hypotenuse, wenn die zugehörige Höhe 8 m und ein durch sie gebildeter Abschnitt 4 m ist?

17) Zwei Strecken zu konstruieren, wenn gegeben ist: α) die Summe c und die mittlere Proportionale p, β) die Differenz d und die mittlere Proportionale p. Andeutung. β) Zeichne einen Kreis mit d als Durchmesser. Benütze den geometrischen Ort der Punkte, von welchen aus Tangenten von der Länge p an den Kreis gezogen werden können, benütze auch § 52 b.

18) Die Quadrate der Sehnen s', s'', s''', welche von dem einen Endpunkte eines Durchmessers d ausgehen, verhalten sich wie ihre Projektionen x', x'', x''' . . auf den letzteren.

19) Das Verhältnis der Flächen zweier Quadrate soll durch das Verhältnis zweier Strecken dargestellt werden.

20) Zu konstruieren: $\alpha)$ $\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{n}$, $\beta)$ $x^2 = \frac{2}{5}a^2$.

21) Das Produkt der beiden Abschnitte, in welche eine Höhe eines Dreiecks durch die übrigen geteilt wird, ist für alle Höhen gleich grofs.

22) Wenn in einem Viereck das Produkt der beiden Abschnitte, in welche eine Diagonale durch die andere geteilt wird, für beide Diagonalen gleich ist, so liegen die Ecken des Vierecks auf einem Kreise. Andeutung. Lege einen Kreis durch A, B, C (Fig. 103 auf Seite 60). Zeige, dafs der Schnitt des Kreises mit der durch C gehenden Diagonale der Punkt D sein mufs.

23) Die Punkte, welche dem Schnittpunkte der drei Höhen

in bezug auf die Seiten eines Dreiecks symmetrisch entsprechen, liegen auf dem umbeschriebenen Kreise (Übung 6).

24) Das Dreieck ABC (Fig. 59) in ein anderes zu verwandeln, dessen Grundlinie mit der gegebenen Richtung a parallel ist. Andeutung. Ziehe $AD \parallel a$; mache CE gleich der mittleren Proportionalen zwischen CD und CB, ziehe durch E eine Parallele mit a bis zum Schnitt mit dem Träger von CA in F. CEF ist das verlangte Dreieck. Beweis. Aus $CB : CE = CE : CD$ und $CA : CF = CD : CE$ (§ 41 b) folgt durch Multiplikation $CA \,.\, CB : CE \,.\, CF = (CE \,.\, CD) : (CD \,.\, CE)$ oder $CA \,.\, CB = CE \,.\, CF$. Die Produkte der den Winkel γ einschliefsenden Seiten sind für beide Dreiecke gleich (vergl. § 37 b, 2).

25) Ein Dreieck $\triangle$ in ein anderes zu verwandeln, das mit einem gegebenen Dreieck $\triangle'$ ähnlich ist. Andeutung. Verwandle das Dreieck $\triangle$ in ein Dreieck $\triangle''$, welches mit dem Dreieck $\triangle'$ einen Winkel entsprechend gleich hat. Lege die Dreiecke so, dafs diese Winkel sich decken und verwandle $\triangle''$ so, dafs die Grundlinie mit der Grundlinie von $\triangle'$ parallel ist (Übung 24).

26) Ein Dreieck $\triangle$ zu konstruieren, welches dem Dreieck $\triangle'$ ähnlich ist und eine gegebene Fläche hat. Die Fläche soll durch ein Dreieck oder ein Parallelogramm (Rechteck, Quadrat) gegeben sein. Andeutung. Die Lösung geschieht durch Üb. 25.

27) Ein Dreieck ABC durch eine Parallele mit der Grundlinie AB so zu teilen, dafs sich das abgeschnittene Stück zum Ganzen wie $m : n$ verhält. Andeutung. Teile CB in n gleiche Teile und ziehe von dem m^{ten} Teilpunkte D (von C aus gerechnet) nach A. Verwandle ADC in ein Dreieck, welches die Grundlinie mit AB parallel hat.

28) α) Alle Punkte auf der gemeinsamen Sehne zweier Kreise k und k' (Fig. 60) haben für beide Kreise gleiche Potenz. (Diese Potenz ist für beide Kreise $MB \,.\, MB'$.)

β) Die von einem Punkte M an beide Kreise gezogenen Tangenten (MD, ME) sind gleich, wenn M auf BB' liegt.

γ) Die durch einen Punkt N gezogenen kleinsten Sehnen beider Kreise sind gleich, wenn N auf BB' liegt.

δ) Die in β) betrachteten Punkte M auf BB' sind Mittelpunkte von Kreisen, welche k und k' rechtwinklig schneiden.

29) Einen Kreis zu ziehen, welcher durch B und B' (Fig. 60) geht und die Gerade a berührt. Analysis. Wenn k durch B und B' geht und die Gerade a in F berührt, so ist AF die mittlere Proportionale von AB und AB'. Die Konstruktion spreche man selbst aus. Man kommt zu zwei Kreisen, weil man die mittlere Proportionale von A beiderseits nach AF und AG abtragen kann. Beweis. Wenn der durch B, B' und F gelegte

Kreis die Gerade a in einem weitern Punkte X träfe, so hätte man $AB \,.\, AB' = AF \,.\, AX$, was mit $AB \,.\, AB' = AF^2$ im Widerspruche steht.

30) Einen Kreis zu zeichnen, welcher die konvergenten Geraden b und b' berührt und durch einen gegebenen Punkt B geht. Andeutung. Der Kreis geht auch durch den Punkt B', welcher dem Punkte B für die Halbierungslinie a eines von b und b' gebildeten Winkels symmetrisch entspricht. Wende Übung 29 an.

31) An eine Strecke eine andere anzutragen, so dafs die ganze Strecke stetig geteilt ist. Andeutung. (Fig. 105 auf Seite 61.) Trage AD von A aus auf die Verlängerung von BA. Die Verlängerte ist dann gleich AG, und AB ist die mittlere Proportionale zwischen der Verlängerten ($= AG$) und der Verlängerung ($= AD$), nach § 52 b.

Übungen zu Abschnitt VII (Kreisberechnung). § 10.

1) Man soll durch den Radius r ausdrücken: die Seite des einbeschriebenen regelmäfsigen α) Sechsecks, β) Vierecks, γ) Dreiecks. Lösungen: r, $r \,.\, \sqrt{2}$, $r \,.\, \sqrt{3}$.

2) Die kleinen Radien ϱ der Vielecke in 1) zu bestimmen. Lösungen: $\frac{1}{2} r \,.\, \sqrt{3}$, $\frac{1}{2} r \,.\, \sqrt{2}$, $\frac{1}{2} r$.

3) Die Flächen der Vielecke in 1) zu bestimmen. Lösungen: $\frac{3}{2} r^2 \,.\, \sqrt{3}$, $2r^2$, $\frac{3}{4} r^2 \,.\, \sqrt{3}$.

4) Durch den Radius r auszudrücken: die Seite des umbeschriebenen regelmäfsigen α) Sechsecks, β) Vierecks, γ) Dreiecks. Lösungen: $\frac{2}{3} r \,.\, \sqrt{3}$, $2r$, $2r \,.\, \sqrt{3}$.

5) Die Seite z des einbeschriebenen regelmäfsigen Zehnecks durch r auszudrücken. Andeutung. Aus $r : z = z : r - z$ (§ 52 d) findet sich $z^2 + r \,.\, z = r^2$ und durch Auflösung nach z: $z = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1)$.

6) Den kleinen Radius ϱ des Zehnecks in 5) zu berechnen. Lösung: $\frac{r}{4} \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

7) Aus der Seite des Zehnecks in 5) die Seite des einbeschriebenen regelmäfsigen Fünfecks nach § 53 b zu berechnen. Lösung: $\frac{1}{2} r \,.\, \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

8) Den kleinen Radius des Fünfecks in 7) zu berechnen. Lösung: $\frac{r}{4}(\sqrt{5}+1)$ oder $\frac{r}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

9) Aus der Seite des regelmäfsigen Sechsecks soll die Seite des regelmäfsigen 12-, 24-, 48- ... Ecks abgeleitet werden.

Lösungen: $S_{12} = \sqrt{r2-\sqrt{3}}$, $S_{24} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$,

$$S_{48} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

10) Von den Ecken eines Quadrats (Seite a) sind gleichschenklige Dreiecke abzuschneiden, so dafs ein regelmäfsiges Achteck übrig bleibt. Sein Inhalt ist

$$2a^2(\sqrt{2}-1) = 0{,}82842\,a^2.$$

11) Den Inhalt des dem regelmäfsigen Dreieck einbeschriebenen Quadrats zu bestimmen. — Eine Seite des Quadrats soll auf einer Seite des Dreiecks liegen. Antwort: $3a^2(7-4\sqrt{3})$.

12) Den Inhalt des einem Quadrate einbeschriebenen regelmäfsigen Dreiecks zu bestimmen. — Ein Eck des Dreiecks soll in ein Eck des Quadrats fallen. Antwort: $a^2(2\sqrt{3}-3)$.

13) Wenn der Radius eines Kreises 2,74 m ist, wie grofs ist die Peripherie auf 0,01 m genau?

14) Die Länge des Erdradius ist 6370 km. Man soll den Umring des Äquators bis auf 10 km genau finden.

15) Man soll bis auf 0,01 m genau den Durchmesser eines Kreises finden, dessen Umfang 542,86 m ist.

16) Man soll bis auf 0,01 m genau den Durchmesser eines Kreises finden, wenn ein Bogen von 52^0 eine Länge von 26,04 m hat.

17) Man soll die Anzahl der Grade, Minuten und Sekunden des Bogens finden, welcher dem Durchmesser gleich ist.

18) Die Fläche eines zwischen zwei koncentrischen Kreisen mit den Radien R und r gelegenen Ringes zu berechnen. Lösung: $\omega = \pi(R^2 - r^2)$.

19) In demselben Ringe die Fläche des durch zwei Radien gebildeten Ausschnitts zu bestimmen, wenn die Radien den Winkel α einschliefsen. Lösung: $\omega = \pi(R^2 - r^2)\cdot\frac{\alpha}{360}$.

20) Die Fläche eines Ringes ist gleich der Fläche eines Kreises, dessen Durchmesser derjenigen Sehne des äufseren Kreises gleich ist, welche der innere Kreis berührt.

21) Ein kreisförmiger Platz von 75 m Durchmesser wird mit Steinen von 25 cm Länge und 2 cm Breite gepflastert, von denen jeder 40 Pfennige kostet. Wie viel kostet das Pflaster?

22) Die Länge eines Bogens von 60^0 ist 140 m. Wie grofs ist die Fläche des zugehörigen Sektors?

23) Den Radius eines Kreises zu berechnen, wenn der zu einem Bogen von 36^0 gehörige Sektor eine Fläche von 400 Quadratmeter hat.

24) Die Fläche eines Segments zu berechnen, dessen Sehne 100,24 m und dessen Bogen 60^0 beträgt.

Fig. 6.

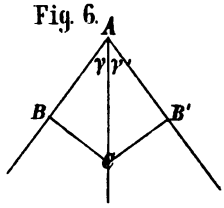


Fig. 7.

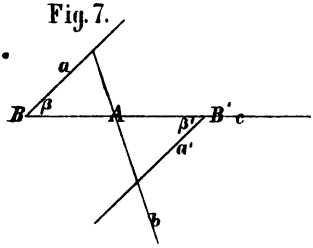
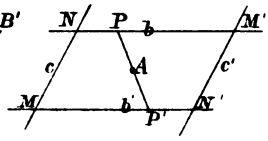
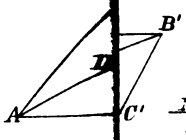


Fig. 13.





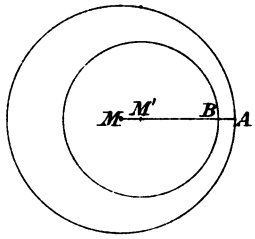
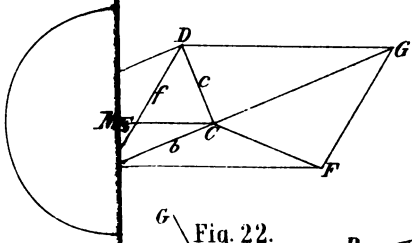


Fig. 14.



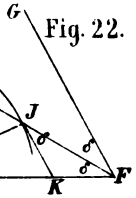


Fig. 22.

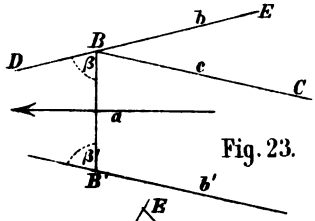


Fig. 23.

Fig. 19.

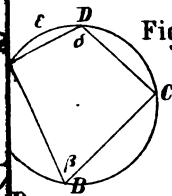


Fig. 28.

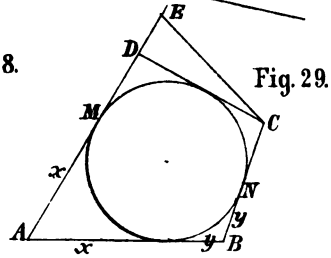


Fig. 29.

Fig. 24.

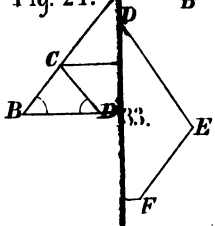


Fig. 33.

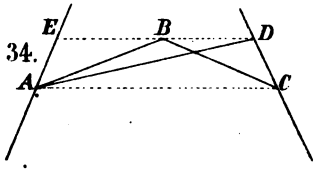


Fig. 34.

LEITFADEN

DER

EBENEN GEOMETRIE,

MIT BENUTZUNG

NEUERER ANSCHAUUNGSWEISEN FÜR DIE SCHULE

BEARBEITET VON

Dr. HUBERT MÜLLER,

OBERLEHRER AM KAISERLICHEN LYCEUM IN METZ,
FRÜHER AUSSERORDENTL. PROFESSOR DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT
DER UNIVERSITÄT FREIBURG I. B.

IN ZWEI THEILEN UND EINEM ANHANGE.

I. DIE GERADLINIGEN FIGUREN UND DER KREIS.
ANHANG ZU I. HARMONISCHE PUNKTE ETC., POTENZLINIEN, POL UND POLARE. KREISBERÜHRUNGEN UND BRENNPUNKTSEIGENSCHAFTEN DER KEGELSCHNITTE.
II. DIE ELEMENTE DER NEUERN GEOMETRIE UND DIE THEORIE DER KEGELSCHNITTE.

ERSTER THEIL. ZWEITES HEFT.

ANHANG: ERWEITERUNGEN ZU THEIL I UND EINLEITUNG IN DIE NEUE GEOMETRIE.
MIT UEBUNGEN.

ZWEITE UMGEARBEITETE AUFLAGE.

LEIPZIG.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1878.

T.E.

Inhaltsverzeichniss.

Seite

I. Abschnitt. Harmonische Strahlen. Das vollständige Viereck und Vierseit 1

§ 1. Durchmesser. — 2. Conjugirte Durchmesser. — 3. Harmonische Strahlen. — 4. Das vollständige Viereck und Vierseit.

II. Abschnitt. Potenzlinien. Der Büschel von Kreisen . . . 5

§ 5. Die Potenzlinie zweier Kreise. — 6. Der Potenzpunkt dreier Kreise. — 7. Die involutorische Reihe. — 8. Fortsetzung. — 9. Involutorische Strahlenbüschel.

III. Abschnitt. Pol und Polare in Bezug auf den Kreis . . . 11

§ 10. Pol und Polare. — 11. Conjugirte Punkte. — 12. Fortsetzung.

IV. Abschnitt. Die ähnlichen Systeme zweier Kreise 17

§ 13. Inverse Punkte. — 14. Aehnlichkeitsaxen dreier Kreise.

V. Abschnitt. Ellipse, Hyperbel und Parabel 22

§ 15. Definition der Ellipse. Brennpunkte. — 16. Axen der Ellipse. — 17. Tangenten der Ellipse. — 18. Definition der Hyperbel. Brennpunkte. — 19. Axen der Hyperbel. — 20. Tangenten der Hyperbel. — 21. Die Asymptoten der Hyperbel. — 22. Definition der Parabel. Brennpunkt. — 23. Tangenten an die Parabel.

I. Abschnitt.

Harmonische Strahlen. Das vollständige Viereck und Vierseit.

Durchmesser. § 1.

a) Jede Strecke, welche in die Figur eines Winkels oder eines Vielecks eingelegt ist (wie die Sehne in den Kreis), wird eine Sehne der Figur genannt. Jede Gerade einer Figur, welche alle Sehnen von einerlei Richtung halbirt, heisst ein Durchmesser der Figur.

b) 1) Das Dreieck hat drei Durchmesser, nämlich die Mittellinien. Jede dieser Linien halbirt diejenigen Sehnen, welche mit der zugehörigen Dreiecksseite parallel sind.

2) Das Parallelogramm hat zweierlei Durchmesser. Jede Diagonale halbirt die Sehnen, welche mit der andern parallel sind. Jede Mittellinie (Verbindungslinie der Mittelpunkte von zwei Gegenseiten) halbirt die Sehnen, welche mit der andern parallel sind.

3) Die Figur zweier convergenten Geraden hat unendlich viele Durchmesser, die alle durch den Schnittpunkt gehen. Zu jeder Sehnenrichtung gehört ein Durchmesser.

Beweise. 1) Aus G. I § 43a folgt für Figur 1: $DA : DB = GE : GF$. Wenn also D die Mitte von AB ist, so ist auch G die Mitte von EF.

Fig. 1.

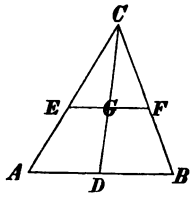
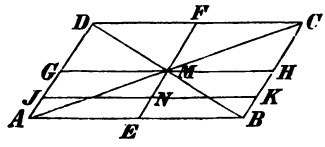


Fig. 2.



2) Die Diagonale (Fig. 2) DB halbirt die andere Diagonale AC in M. Jede zu AC parallele Sehne des Parallelogramms

ist aber auch Sehne in einem der Dreiecke ACD oder ACB und mit der Grundlinie AC parallel; folglich wird sie nach 1) durch DB halbirt.

Die Mittellinie EF ist die Halbirungslinie des Streifens der von AD und BC gebildet ist (Uebungen zu G. I, § 1 Ueb. 19). Jede in den Streifen eingelegte Strecke JK (also auch die zu der Seite AB oder der Mittellinie GH parallelen Sehnen des Parallelogramms) wird von FE in ihrem Mittelpunkte N getroffen.

3) Wenn AB (Fig. 1) eine Sehne von beliebiger Richtung ist, welche in dem Winkel ACB liegt, so ist nach 1) CD der zugehörige Durchmesser.

Anmerkung. Ein Durchmesser, welcher auf den von ihm halbirten Sehnen senkrecht steht, ist eine Symmetrieaxe der Figur.

§ 2. Conjugirte Durchmesser.

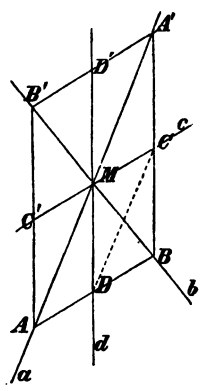
a) Zwei Durchmesser heissen conjugirt, wenn jeder die zum andern parallelen Sehnen halbirt.

1) Das Parallelogramm hat zweierlei conjugirte Durchmesser, die Diagonalen und die Mittellinien.

2) Die Figur zweier convergenten Geraden a und b hat unendlich viele Paare conjugirter Durchmesser. Je zwei derselben sind durch die Geraden a und b getrennt.

Beweis 1) folgt direct aus § 1b, 2. Um 2) zu beweisen, ziehe man eine beliebige Sehne AB in der Figur 3 der Schnittlinien a und b. Macht man $MA' = MA$ und $MB' = MB$, so ist die Figur $ABA'B'$ ein Parallelogramm (G. I § 29b, 3). Die Geraden MD und MC, welche M mit den Mittelpunkten D und C der Sehnen AB und BA' verbinden, sind Durchmesser der Figur. Sie sind aber conjugirt, weil sie die Mittellinien in dem Parallelogramm $ABA'B'$ sind.

Fig. 3.



Anmerkung. Man beachte, dass die gegebenen Geraden a und b die Diagonalen in diesem Parallelogramm sind.

b) a, b, c, d seien 4 Geraden, welche durch einen Punkt M gehen. Wenn c und d conjugirte Durchmesser der von a und b gebildeten Figur sind, so sind auch a und b conjugirte Durchmesser der von c und d gebildeten Figur. Die 4 Geraden heissen alsdann 4 harmonische Strahlen.

Die Strahlen a und b sind einander zugeordnet, ebenso die Strahlen c und d.

Zum Beweise der in b) enthaltenen Behauptung benutze man die Figur 3. Die Punkte D, C, D', C' sind die Ecken eines Parallelogramms, dessen Diagonalen d und c sind. Es ist auch leicht zu zeigen, dass die Linien a und b die Mittellinien dieses Parallelogramms sind. Die Seite DC des Parallelogramms wird z. B. von MB oder b halbirt, weil DC und MB Diagonalen in dem kleinen Parallelogramm $DBCM$ sind. Nun folgt aber aus dem Beweise des Satzes a, 2) in diesem Paragraphen, dass a und b conjugirte Durchmesser der von c und d gebildeten Figur sind.

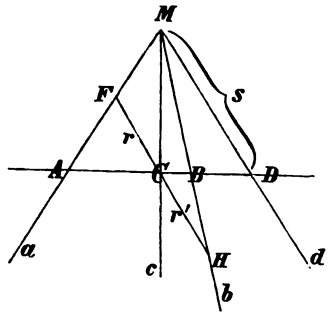
Harmonische Strahlen. § 3.

a) 4 harmonische Strahlen (§ 2 b) werden von jeder Geraden in 4 harmonischen Punkten geschnitten.

α) Die Strahlen, welche von einem Punkte nach 4 harmonischen Punkten gezogen sind, sind 4 harmonische Strahlen.

Beweise. a) a, b, c, d in Fig. 4 seien 4 harmonische Strahlen, welche durch eine Gerade in A, B, C, D geschnitten werden. Wenn man durch den Punkt C eine Parallele zu dem Strahle d zieht, so hat man nach G. I § 41 c

Fig. 4.



1) $\quad r : s = AC : AD$

2) $\quad r' : s = BC : BD.$

Da aber c und d conjugirte Durchmesser für die von a und b gebildete Figur sind, so wird die zu d parallele Sehne in C halbirt und man hat $r = r'$. Die linken Seiten in 1) und 2) sind gleich und daraus folgt

$$AC : AD = BC : BD,$$

d. h. der Abstand CD wird in A und B harmonisch getheilt, was zu beweisen war. (Vergl. G. I, § 42 γ.)

α) A, B, C, D in Fig. 4 seien 4 harmonische Punkte, durch welche die Strahlen a, b, c, d nach M gezogen sind. Wenn wieder $FH \parallel MD$, so gelten die Proportionen 1) und 2) wie bei dem Beweise von a). Da aber nun nach Voraussetzung

$$AC : AD = BC : BD,$$

so sind die rechten Seiten in 1) und 2) und folglich auch die

linken Seiten einander gleich, woraus $r = r'$ folgt. Wenn aber die zu d parallele Sehne FH durch c halbirt wird (in C), so sind c und d conjugirte Durchmesser der durch a und b gebildeten Figur.

§ 4. Das vollständige Viereck und Vierseit*).

Fig. 5.

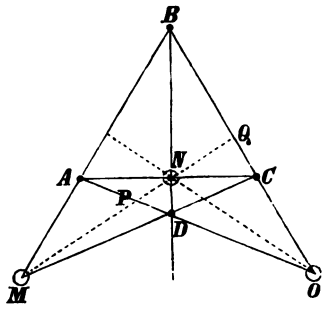
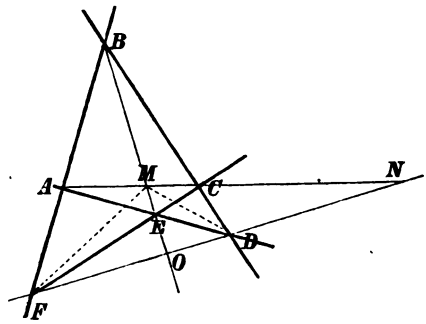


Fig. 6.



a) Auf zwei Gegenseiten (AD und BC in Fig. 5) eines vollständigen Vierecks entstehen durch das Nebeneck (O), in welchem sie sich schneiden, und durch ihre Schnittpunkte mit der Verbindungslinie (MN) der übrigen Nebenecken 4 harmonische Punkte.

α) In zwei Gegenpunkten (F und D in Fig. 6) eines vollständigen Vierseits entstehen durch die Diagonale (FD), auf welcher sie liegen, und durch ihre Verbindungslinien mit dem Schnittpnnkte (M) der übrigen Diagonalen je 4 harmonische Strahlen.

Beweise. a) Man denke sich auf jeder der Geraden AD und BC den zu O zugeordneten 4ten harmonischen Punkt bestimmt. Diese Punkte P und Q müssen alsdann beide in denjenigen Strahl des Punktes N fallen, welcher mit NO zusammen die Winkel der Geraden AC und BD harmonisch theilt (§ 3α), d. h. N muss auf der Geraden PQ liegen. Ebenso wird bewiesen, dass auch M auf der Geraden PQ gelegen ist, woraus folgt, dass P und Q die Schnittpunkte von NM mit den Gegenseiten AD und BC sind.

α) Man denke sich in jedem der Punkte F und D den zu FD zugeordneten 4ten harmonischen Strahl bestimmt. Diese beiden Strahlen müssen die Gerade AC in dem zu N zugeordneten harmonischen Punkte treffen (§ 3 a), d. h. sie müssen

*) Die Definitionen dieser Figuren siehe in G. I § 15.

sich auf der Geraden AC schneiden. Ebenso wird bewiesen, dass sich diese Strahlen auch auf der Geraden EB treffen, woraus folgt, dass sie die Verbindungslinie der Gegenpunkte F und D mit dem Schnittpunkte M sind.

b) In einem vollständigen Viereck entstehen in jedem Nebeneck durch seine Verbindungslinien mit den übrigen Nebenecken 4 harmonische Strahlen.

β) In einem vollständigen Vierseit wird jede Diagonale durch die übrigen Diagonalen harmonisch getheilt.

Beweise. b) (Fig. 5.) NA, NM, ND, NO sind 4 harmonische Strahlen, weil A, P, D, O nach a) 4 harmonische Punkte sind (§ 3 α). Ebenso wird die Behauptung für die andern Nebenecken bewiesen.

β) (Fig. 6.) A, M, C, N sind 4 harmonische Punkte, weil DA, DM, DC, DN nach α) 4 harmonische Strahlen sind (§ 3 a). Ebenso wird die Behauptung für die andern Diagonalen bewiesen.

II. Abschnitt.

Potenzlinien. Der Büschel von Kreisen.

Die Potenzlinie zweier Kreise. § 5.

a) Der geometrische Ort aller Punkte, welche für zwei Kreise gleiche Potenz haben, ist eine Gerade, welche auf der Centralen der beiden Kreise senkrecht steht.

Beweis. Wenn die Radien der Kreise a und b (Fig. 7) r und r' heissen, so sind

$\overline{MA}^2 - r^2$ und $\overline{MB}^2 - r'^2$

die Werthe der Potenz von M für die Kreise a und b. Der geometrische Ort für die Punkte, welche der Bedingung

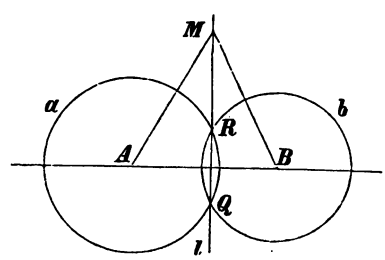
$$\overline{MA}^2 - r^2 = \overline{MB}^2 - r'^2$$

oder

$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = r^2 - r'^2$$

genügen, ist nach den Uebungen zu G. I § 6 Ueb. 64 eine Gerade, welche auf AB senkrecht steht.

Fig. 7.



b) Zusätze. 1) Wenn zwei Kreise sich schneiden (berühren), so ist die Potenzlinie ihre gemeinsame Sehne (Tangente). Treffen sich die Kreise nicht, so kann auch die Potenzlinie keinen der Kreise treffen.

2) Diejenigen Punkte der Potenzlinie beider Kreise, welche von diesen Kreisen ausgeschlossen sind, haben die Eigenschaft, dass von ihnen gleichlange Tangenten an beide Kreise gezogen werden können. Diejenigen Punkte, welche von beiden Kreisen eingeschlossen sind, haben die Eigenschaft, dass die durch sie gezogenen kleinsten Sehnen (siehe die Uebungen zu G. I § 6 Ueb. 50) einander gleich sind.•

§ 6. Der Potenzpunkt dreier Kreise.

a) Drei Kreise lassen drei Potenzlinien entstehen. Jeder Punkt, der zweien derselben gemeinsam ist, hat für alle drei Kreise gleiche Potenz und liegt daher auch auf der dritten Potenzlinie. Demnach sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Die 3 Potenzlinien haben nur einen Punkt gemeinsam (Potenzpunkt dreier Kreise).

2) Die 3 Potenzlinien haben mehr wie einen Punkt gemeinsam; sie fallen in eine Gerade g zusammen, welche die gemeinsame Potenzlinie der 3 Kreise heisst.

Beweis. p', p'', p''' seien die Werthe der Potenz eines Punktes M in Bezug auf die drei Kreise a, b, c. Wenn M auf der Potenzlinie von a und b liegt, so ist $p' = p''$; wenn M auf der Potenzlinie von a und c liegt, so ist $p' = p'''$. Alsdann ist $p' = p'' = p'''$, d. h. M hat für die 3 Kreise gleiche Potenz. Da aber $p'' = p'''$, so muss der Punkt M auch auf der Potenzlinie von b und c liegen. Wenn noch ein zweiter Punkt N vorhanden ist, der für die drei Kreise gleiche Potenz hat, so muss auch dieser auf allen drei Potenzlinien zugleich liegen, d. h. die Potenzlinien fallen zusammen.

b) Unter einem Büschel von Kreisen versteht man die Gesammtheit aller Kreise, welche eine Gerade g zur gemeinsamen Potenzlinie haben (siehe a).

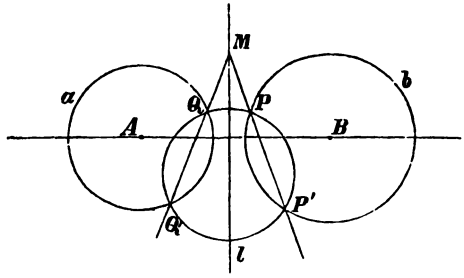
Ein Büschel von Kreisen ist durch einen der Kreise a und die gemeinsame Potenzlinie g bestimmt. Durch jeden Punkt P der Ebene geht ein Kreis des Büschels.

Man soll denselben construiren.

Auflösung. Wenn der Kreis a von der Potenzlinie in Q und R (Fig. 7) geschnitten wird, so ist der durch P gehende

Kreis des Büschels dadurch bestimmt, dass er auch durch Q und R gehen muss. Wird aber a von der Potenzlinie g nicht getroffen (Fig. 8), so ziehe man durch einen Punkt M der Potenzlinie l die Gerade MP und eine Secante QQ' des Kreises a.

Fig. 8.



Der gesuchte Kreis b muss die Gerade MP noch in einem zweiten Punkte P' treffen. Da aber M für a und b gleiche Potenz hat, so gilt die Gleichung*) $(MQ).(MQ') = (MP).(MP')$, durch welche die Lage des Punktes P' auf der Geraden MP bestimmt ist. Ausserdem bedenke man, dass der Mittelpunkt von b auf der Senkrechten liegt, welche von A auf l gefällt werden kann.

Anmerkung. Um den Punkt P' zu bestimmen, kann man den durch Q, Q', P bestimmten Kreis ziehen. Er schneidet MP in dem gesuchten Punkte P', denn nach G. I § 52 a u. Anm. ist

$$(MQ) . (MQ') = (MP) . (MP').$$

Die involutorische Reihe. § 7.

a) 1) Durch die Kreise eines Büschels sind die Punkte jeder Geraden g einander paarweise zugeordnet. Durch einen beliebigen Punkt A' auf g geht nämlich ein Kreis a des Büschels, welcher die Gerade g in einem zweiten Punkte A'' trifft**). Auf dieselbe Weise kommt man vom Punkte A'' ausgehend wieder zum Punkte A' zurück.

2) Diese Punktepaare A', A''; B', B'' (Fig. 9), in welchen der Träger g von den Kreisen a, b, c geschnitten wird, genügen der Gleichung

I) $(MA') . (MA'') = (MB') . (MB'') = (MC') . (MC'') \ldots,$

(wo M den Schnittpunkt des Trägers g mit der Potenzlinie

*) Siehe auch G. I, § 41, Anmerkung.

**) A' und A'' können auch zusammenfallen. Siehe die Uebungen zu G. I, § 9, Ueb. 29.

l bezeichnet) und bilden eine sogenannte „involutorische Punktreihe“*).

3) Der Punkt M heisst Mittelpunkt der Reihe und der gemeinsame Werth der in Gleichung I) enthaltenen Producte wird als die Potenz der involutorischen Reihe bezeichnet.

Der Beweis der Gleichung I ergibt sich aus dem Umstand, dass M für alle Kreise des Büschels gleiche Potenz hat. Der gemeinsame Werth dieser Potenz ist mit Berücksichtigung der Vorzeichen aller Strecken durch die Producte der Gleichung I dargestellt.

b) Eine involutorische Reihe des Trägers g ist bestimmt

1) durch den Mittelpunkt und ein Paar zugeordneter Punkte;

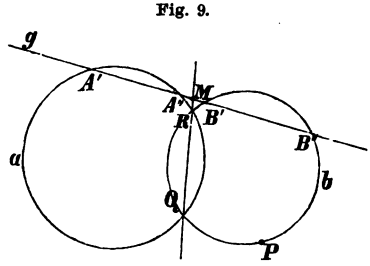
2) durch zwei Paare zugeordneter Punkte.

Beweis. 1) M (Fig. 9) sei der Mittelpunkt der Reihe und A', A'' zwei zugeordnete Punkte. Wenn B' ein anderer, beliebig auf g angenommener Punkt ist, so wird die Lage des zugeordneten Punktes B'' durch die Gleichung

$$(MB').(MB'') = (MA').(MA'')$$

bestimmt, in welcher (MB'') die einzige Unbekannte ist. Durch Construction von Kreisen ist B'' auf folgende Weise zu finden: Ziehe durch A' und A'' den Kreis a beliebig. Schneide mit einer durch M gezogenen Geraden den Kreis a in R und Q und ziehe durch R, Q, B' den Kreis b. Derselbe schneidet g in dem zu B' zugeordneten Punkte B'' (vergl. Satz a).

Fig. 9.



2) A', A''; B', B'' in Fig. 9 seien die beiden Paare zugeordneter Punkte und R sei ein beliebiger Punkt ausserhalb g. Ziehe den Kreis a durch A', A'', R und den Kreis b durch B', B'', R. Die gemeinsame Secante RQ von a und b trifft g in dem Mittelpunkt M der Reihe. Eine involutorische Reihe mit den Punktepaaren A', A''; B', B'' und einem von M verschiedenen Mittelpunkte N kann nicht existiren, denn es müsste die Gleichung

$$(NA').(NA'') = (NB').(NB'')$$

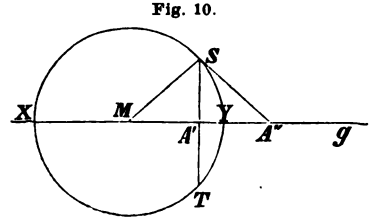
*) Der Name involutorisch bezieht sich auf das doppelte Entsprechen, durch welches man vom Punkte A' auf A'' und von A'' wieder auf A' geführt wird.

bestehen, welche aussagt, dass N für die Kreise a und b gleiche Potenz haben muss. Dies ist unmöglich, da der Träger g von der Potenzlinie der Kreise a und b nur in einem Punkte getroffen werden kann.

Fortsetzung. § 8.

a) Wenn die Potenz einer involutorischen Reihe positiv ist, so existiren zwei sich selbst zugeordnete Punkte der Reihe (Doppelpunkte). Die übrigen Punktepaare theilen den Abstand der Doppelpunkte harmonisch.

Fig. 10.



Beweis. M (Fig. 10) sei der Mittelpunkt der Reihe und A', A'' seien zwei zugeordnete Punkte, welche auf derselben Seite von M liegen müssen, da $(MA') \cdot (MA'')$ positiv ist. Man construire über MA'' als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck $MA''S$, in welchem A' der Fusspunkt der Höhe ist. Mit MS als Radius ziehe man um M einen Kreis, welcher die Gerade $A''S$ in S berühren und den Träger g in zwei Punkten X und Y schneiden muss. Jede der Strecken MS, MX, MY ist die mittlere Proportionale zwischen MA' und MA'' (G. I, § 51 a). Aus der Gleichung $(MX)^2 = (MY)^2 = (MA') \cdot (MA'')$, die auch $(MX) \cdot (MX) = (MY) \cdot (MY) = (MA') \cdot (MA'')$ geschrieben werden kann, sieht man, dass Punkt X, sowie Punkt Y in beiden Reihen sich selbst entspricht. Dass aber die Strecke XY in A' und A'' harmonisch getheilt wird, folgt aus G. I, § 46 c, da die Strecke SA' auf der zu A'' gehörigen Berührungssehne ST gelegen ist und XY den durch A'' gezogenen Kreisdurchmesser darstellt.

b) Alle Punktepaare, welche eine Strecke XY harmonisch theilen, bilden eine involutorische Punktreihe, deren Doppelpunkte X und Y sind. Der Mittelpunkt der Reihe halbirt den Abstand XY.

Beweis. Zeichne über XY (Fig. 10) als Durchmesser einen Kreis, dessen Mittelpunkt M ist. Die zu A'' gehörige Berührungssehne ST geht nach G. I, § 46 c durch den zugeordneten vierten harmonischen Punkt A'. Aus dem rechtwinkligen Dreieck MSA'' folgt nun nach G. I, § 51 a $(MS)^2 = (MX)^2 = (MY)^2 = (MA')(MA'')$, woraus sich ergibt, dass X und Y Doppelpunkte einer involutorischen Punktreihe mit dem Mittelpunkte M und der (positiven) Potenz $(MS)^2 = (MX)^2 = (MY)^2$ sein müssen, in welcher Reihe A' und A'' zugeordnete Punkte sind.

c) Wenn die Potenz einer involutorischen Reihe negativ ist, so sind je zwei zugeordnete Punkte durch den Mittelpunkt der Reihe getrennt. Die Reihe enthält keine Doppelpunkte. Es gibt 2 entsprechende Punkte, die von dem Mittelpunkt der Reihe gleichweit abstehen.

Wenn die Potenz $(MA') \cdot (MA'')$, die wir mit x bezeichnen wollen, negativ ist, so ergibt sich für den Abstand eines etwaigen Doppelpunktes von M aus der Gleichung $(MX)^2 = x$ der imaginäre Werth $MX = \pm\sqrt{x}$. Man erlaubt sich auch zu sagen: Die Doppelpunkte einer solchen involutorischen Reihe seien imaginär und $\pm\sqrt{x}$ sei der Werth ihres (imaginären) Abstandes von M.

Anmerkung. Wenn man in einer involutorischen Reihe mit Doppelpunkten einen Punkt jedes Paares mit dem für M symmetrisch gelegenen Punkte (G. I, § 4) vertauscht, so erhält man eine involutorische Reihe mit negativer Potenz (ohne Doppelpunkte). Die früheren Doppelpunkte sind jetzt einander zugeordnet.

§ 9. Involutorische Strahlenbüschel.

a) Erklärung. Unter einem involutorischen Strahlenbüschel versteht man die Gesammtheit aller Strahlenpaare, welche die Punktepaare einer involutorischen Punktreihe mit einem Punkte verbinden, der nicht auf dem Träger der Reihe liegt. Zwei Strahlen, welche zugeordnete Punkte der involutorischen Reihe enthalten, heissen ebenfalls zugeordnet.

b) Ein involutorischer Strahlenbüschel enthält zwei sich selbst zugeordnete Strahlen (Doppelstrahlen) oder keine solche, je nachdem er aus einer involutorischen Punktereihe mit oder ohne Doppelpunkte entstanden ist. Im ersten Falle theilen je zwei zugeordnete Strahlen die Winkel der Doppelstrahlen harmonisch.

Der Beweis von b) folgt aus der Definition a) und aus § 8 a, § 3 α.

Anmerkung. Wie der involutorischen Reihe reelle oder imaginäre Doppelpunkte zugeschrieben werden, so schreibt man dem involutorischen Strahlenbüschel reelle oder imaginäre Doppelstrahlen zu.

III. Abschnitt.

Pol und Polare in Bezug auf den Kreis.

Pol und Polare. § 10.

a) Wenn man einen beliebigen Punkt P (Fig. 11 od. 13) mit dem Mittelpunkte eines Kreises verbindet und auf dem so bestimmten Durchmesser denjenigen Punkt M sucht, welcher mit P zusammen den Durchmesser harmonisch theilt, so heisst die in M errichtete Senkrechte p die Polare von P.

Aus α) folgt, dass zugleich P der Pol von p ist.

b) 1. Die Polare eines ausserhalb des Kreises gelegenen Punktes ist durch seine Berührungssehne dargestellt. (Fig. 11.)

2. Die Polare eines Kreispunktes fällt mit seiner Tangente zusammen. (Fig. 12.)

3. Die Polare eines innerhalb des Kreises gelegenen Punktes trifft den Kreis nicht. (Fig. 13.)

Fig. 11.

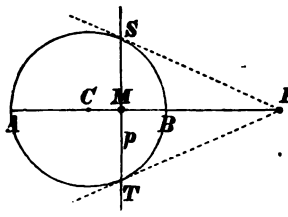


Fig. 12.

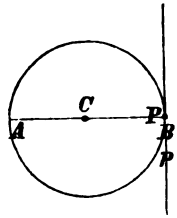
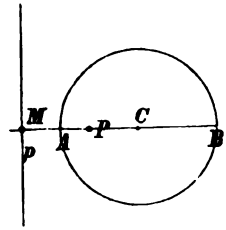


Fig. 13.



α) Wenn man aus dem Mittelpunkte eines Kreises auf eine beliebige Gerade p (Fig. 11 oder 13) eine Senkrechte fällt und auf dem so bestimmten Durchmesser denjenigen Punkt P sucht, welcher mit dem Fusspunkte M den Durchmesser harmonisch theilt, so heisst P der Pol von p.

Aus a) folgt, dass zugleich p die Polare von P ist.

β) 1. Der Pol einer Sehne ist der Schnittpunkt der Tangenten in ihren beiden Endpunkten. (Fig. 11.)

2. Der Pol einer Tangente fällt mit ihrem Berührungspunkte zusammen. (Fig. 12.)

3. Der Pol einer Geraden, welche den Kreis nicht trifft, ist innerhalb des Kreises gelegen. (Fig. 13.)

Beweise zu b). 1) Die Behauptung folgt aus der Definition a), wenn man bedenkt, dass der Punkt P (Fig. 11) und die zugehörige Berührungssehne ST den durch P gezogenen Kreis-

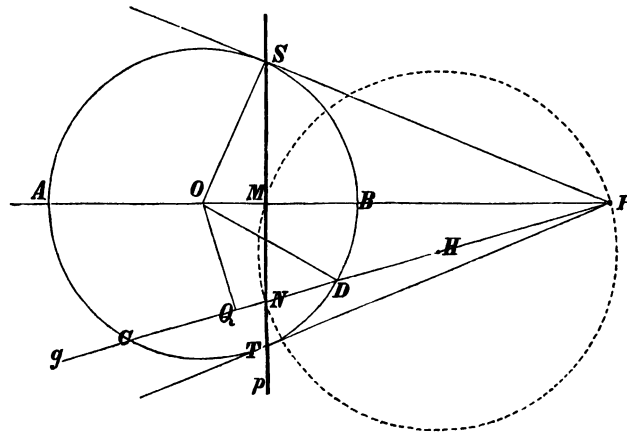
durchmesser harmonisch theilen (G. I, § 46 c) und dass diese Berührungssehne auf dem Durchmesser AB senkrecht steht. 2) Wenn P in einen Punkt B des Kreises fällt (Fig. 12), so fällt auch der vierte harmonische Punkt M mit B zusammen. Die Polare des Punktes B ist also nach der Definition a) die in B auf AB errichtete Senkrechte oder die Tangente in B. 3) Wenn P innerhalb des Kreises liegt (Fig. 13), so fällt der vierte harmonische Punkt M des durch P gezogenen Durchmessers ausserhalb des Kreises und dasselbe findet für die Polare p statt.

Die Sätze unter β) sind mit den Sätzen α) identisch.

c) Die Punkte einer Geraden (welche den Kreis nicht berührt) und die Schnittpunkte der zugehörigen Polaren mit derselben Geraden bilden die Punktepaare einer involutorischen Punktreihe (§ 7).

Wenn die gegebene Gerade den Kreis in zwei Punkten trifft, so sind dieselben Doppelpunkte der involutorischen Reihe. Wenn die gegebene Gerade den Kreis nicht trifft, so enthält die involutorische Reihe keine Doppelpunkte.

Fig. 14.



Beweis. (Fig. 14.) P sei ein Punkt auf der Geraden g und N sei der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Polaren p von P. OQ sei senkrecht auf g gefällt. Da der Winkel NMP recht ist, so liegen die Punkte NMP auf einem Kreise, dessen Durchmesser NP ist. $(OM).(OP)$ und $(QN).(QP)$ sind die Werthe der Potenz von O und Q in Bezug auf diesen Kreis. Da die Potenz eines Punktes gleich $d^2 - r^2$ ist, wo d die Entfernung des Punktes vom Centrum und r den Radius des Kreises

bedeutet, so findet sich für die Differenz der Potenzen beider Punkte O und Q der Ausdruck $(OH)^2 - (QH)^2$, da das Quadrat des Radius sich weghebt. Aus dem rechtwinkligen Dreieck HOQ ergibt sich aber $(OH)^2 - (QH)^2 = (OQ)^2$. Man hat also die Gleichung

1) $$(OQ)^2 = (OM) \cdot (OP) - (QN) \cdot (QP).$$

Weil ferner AB durch M und P harmonisch getheilt und O die Mitte von AB ist, so hat man nach dem Beweis von § 8 b

2) $$(OB)^2 = (OM) \cdot (OP).$$

Wenn man 1) von 2) abzieht und dabei $(OB)^2 - (OQ)^2 = r^2 - d^2 = x$ setzt (d bedeutet hier den Abstand der Geraden g vom Centrum O, und r den Radius des Kreises um O), so erhält man:

$$x = (QN) \cdot (QP).$$

Die Punktepaare N, P bilden also eine involutorische Reihe mit dem Mittelpunkte Q und der Potenz x. Die Potenz x ist positiv, wenn d kleiner als r ist, wenn also der Kreis von der Geraden g in zwei Punkten C und D geschnitten wird. Auch ist $x = (QC)^2 = (QD)^2$, woraus man sieht, dass C und D die Doppelpunkte der involutorischen Reihe sind (§ 8 a).

Anmerkung 1. $\sqrt{x} = \sqrt{r^2 - d^2}$ bestimmt die Lage der Punkte, in welchen der Kreis von der Geraden g getroffen wird. $\pm\sqrt{x}$ ist nämlich der Abstand eines dieser Punkte von dem Punkte Q. Wenn $d > r$, so wird $\sqrt{x}$ imaginär. Man sagt in diesem Falle auch, die Gerade g treffe den Kreis in zwei imaginären Punkten, deren imaginäre Abstände von Q gleich $\pm\sqrt{x}$ seien. Nach dem bei § 8 c Bemerkten schreibt man aber in diesem Falle auch der involutorischen Reihe auf g imaginäre Doppelpunkte zu, deren Abstände von Q ebenfalls durch die imaginären Werthe $\pm\sqrt{x}$ dargestellt sind. Man versteht hiernach die folgende Ausdrucksweise des Satzes: Die involutorische Reihe der Punktepaare P, N hat als reelle oder imaginäre Doppelpunkte die reellen oder imaginären Schnittpunkte des Kreises mit dem Träger g.

Anmerkung 2. Wenn die gegebene Gerade den Kreis berührt, so zerfällt die involutorische Reihe, indem alsdann die Polare eines jeden auf dieser Tangente gelegenen Punktes durch den Berührungspunkt geht.

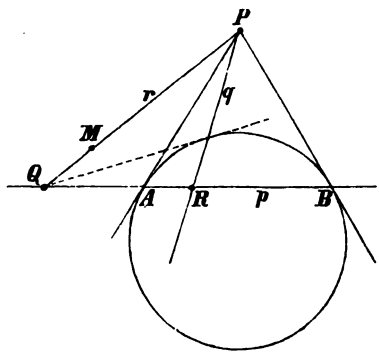
Conjugirte Punkte. § 11.

a) Wenn der Punkt Q auf der Polaren von P liegt, so liegt auch P auf der Polaren von Q.

α) Wenn die Gerade q durch den Pol von p geht, so geht auch p durch den Pol von q.

Beweis a). Es sind zwei Fälle zu unterscheiden. 1) Wenn die Gerade PQ (Fig. 15) den Kreis nicht berührt, so erzeugen die Punkte dieser Geraden und die zugehörigen Polaren eine involutorische Reihe auf derselben, in welcher die Punkte P und Q einander zugeordnet sind. Würde nun die Polare von Q nicht durch P, sondern durch einen andern Punkt M der Geraden PQ gehen, so wären Q und M auch zugeordnete Punkte, das heisst, der Punkt Q würde sowohl mit P als auch mit M ein Paar zugeordneter Punkte derselben involutorischen Reihe bilden, was unmöglich ist.

Fig. 15.



2) Wenn PQ Tangente ist, so bedenke man, dass die Polare von P zugleich die Berührungssehne dieses Punktes ist; der Punkt Q, welcher einer durch P gehenden Tangente und der Polaren (Berührungssehne) zugleich angehört, muss der Berührungspunkt dieser Tangente sein. Dann fällt aber die Polare von Q mit dieser Tangente zusammen und geht deshalb durch P, was zu beweisen war.

Der Satz α) ist nur eine andere Ausspruchsweise des Satzes a).

b) Erklärung. Zwei Punkte heissen conjugirt, wenn der eine und folglich jeder in der Polaren des andern liegt.

c) Die Pole aller Geraden eines Punktes P liegen auf Polaren p dieses Punktes.

β) Erklärung. Zwei Geraden heissen conjugirt, wenn die eine und folglich jede durch den Pol der andern geht.

γ) Die Polaren aller Punkte einer Geraden p gehen durch den Pol P dieser Geraden.

Beweis c). Diese Pole sind dem Punkte P conjugirt und müssen also auf seiner Polaren liegen. γ) Diese Polaren sind der Geraden p conjugirt und müssen also durch ihren Pol gehen.

d) Zwei conjugirte Punkte und der Pol ihrer Verbindungslinie oder zwei conjugirte Gerade und die Polare ihres Schnittpunktes bilden ein sogenanntes Polardreieck, das heisst ein Dreieck, in welchem jede Seite die Polare des gegenüberliegenden Ecks und jedes Eck der Pol der gegenüberliegenden Seite ist (b und β).

Fortsetzung. § 12.

a) Die conjugirten Punkte einer Geraden bilden eine involutorische Punktreihe.

Die Doppelpunkte dieser Reihe sind durch die Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreise dargestellt.

α) Die conjugirten Strahlen eines Punktes bilden einen involutorischen Strahlenbüschel.

Die Doppelstrahlen dieses Büschels sind durch die von dem Punkte an den Kreis gelegten Tangenten dargestellt.

Beweise. a) Dem Punkte Q der Geraden p (Fig. 15) ist der Schnittpunkt R von p mit der Polaren q des Punktes Q conjugirt. Die Paare conjugirter Punkte auf der Geraden p bilden also nach § 10 c eine involutorische Reihe.

α) q sei eine durch P gezogene Gerade, welche die Polare p von P in R trifft. Der Pol Q von q muss auf p liegen (§ 11 *α)*; die Verbindungslinie QP oder r ist der zu q conjugirte Strahl des Punktes P. Die Punktepaare QR bilden nun nach a) eine involutorische Punktreihe, folglich bilden auch die Strahlenpaare r, q einen involutorischen Strahlenbüschel (§ 9 a).

b) Zusatz. Jede Secante wird durch zwei conjugirte Punkte derselben harmonisch getheilt.

β) Zusatz. Die Winkel zweier Tangenten werden durch zwei conjugirte Strahlen ihres Schnittpunktes harmonisch getheilt.

Anmerkung. Die Tangenten, welche von einem Punkte P (Fig. 11) an den Kreis gezogen werden können, sind die Geraden, welche P mit den Schnittpunkten S und T der Polaren p und des Kreises verbinden. Sind die Schnittpunkte imaginär (siehe Anmerk. zu § 10), so werden auch keine Tangenten vorhanden sein. Man gebraucht aber hier die Ausdrucksweise, dass „imaginäre Tangenten" vorhanden seien, welche den Punkt P mit jenen imaginären Schnittpunkten verbinden. Mit Rücksicht auf das in den Anmerkungen zu § 9 und § 10 Bemerkte kann man sagen:

Die reellen oder imaginären Punkte, welche eine Gerade mit einem Kreise gemein hat, sind die reellen oder imaginären Doppelpunkte derjenigen involutorischen Reihe, welche durch die conjugirten Punkte jener Geraden gebildet ist.

Die reellen oder imaginären Tangenten eines Kreises, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, sind die reellen oder imaginären Doppelstrahlen desjenigen involutorischen Strahlenbüschels, welcher durch die conjugirten Strahlen jenes Punktes gebildet wird.

c) Wenn ein vollständiges Viereck einem Kreise einbeschrieben ist, so ist die Polare jedes Nebenecks durch die Verbindungslinie der übrigen dargestellt. (Die Nebenecken bilden ein Polardreieck.)

γ) Wenn ein vollständiges Vierseit einem Kreise umbeschrieben ist, so ist der Pol jeder Diagonale durch den Schnittpunkt der übrigen dargestellt. (Die Diagonalen bilden ein Polardreieck.)

Fig. 16.

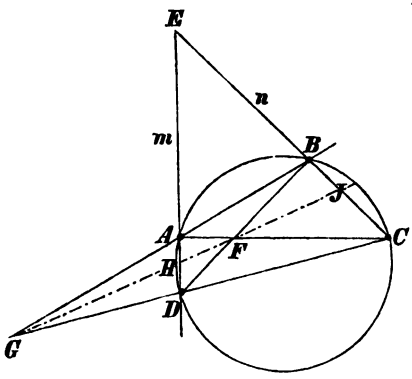
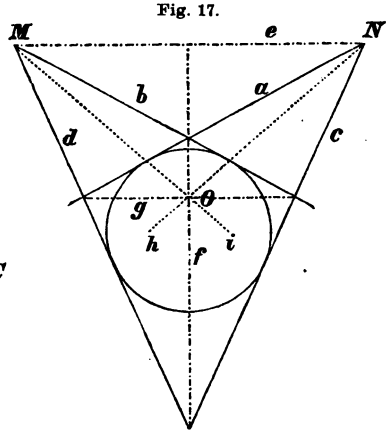


Fig. 17.



Beweise. c) Die in dem Nebeneck E (Fig. 16) sich schneidenden Secanten AD und BC werden durch die Verbindungslinie GF der übrigen Nebenecken in H und J harmonisch getheilt (§ 4 a). Die Punkte H und J sind also beide dem Punkte E conjugirt und HJ oder GF ist die Polare von E.

γ) a, b, c, d (Fig. 17) sind die Seiten des Vierseits. Die von d und b, von a und c gebildeten Tangentenwinkel, deren Scheitel die Gegenecken M und N sind, werden durch die Diagonale MN und die Strahlen MO und NO (MO und NO verbinden die auf der Diagonalen e gelegenen Gegenecken mit dem Schnittpunkte O der übrigen Diagonalen) harmonisch getheilt (§ 4 α). Die Strahlen MO und NO sind also beide zu MN conjugirt (§ 12 β) und schneiden sich im Pole von MN (§ 11 β).

d) Aufgabe. Wenn ein Kreis gezeichnet vorliegt, so soll zu einem beliebigen Punkte die zugehörige Polare ohne Hülfe des Zirkels gefunden werden.

δ) Aufgabe. Wenn ein Kreis gezeichnet vorliegt, so soll zu einer beliebigen Geraden der zugehörige Pol ohne Hülfe des Zirkels gefunden werden.

Auflösungen. d) Ziehe durch E (Fig. 16) die Secanten AD und BC. Die Schnittpunkte mit dem Kreise bestimmen das vollständige Viereck $ABCD$. Die Polare des Nebenecks E ist die Verbindungslinie GF der übrigen Nebenecken (Satz c).

δ) Ziehe durch zwei beliebige Punkte M und N (Fig. 17) auf der Geraden e die Tangenten a, b, c, d, welche ein vollständiges Vierseit bestimmen. Der Pol der Diagonale e ist der Schnittpunkt O der übrigen Diagonalen (Satz γ).

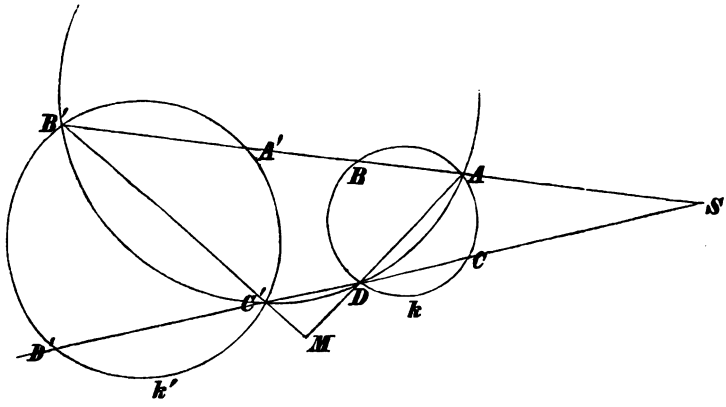
IV. Abschnitt.

Die ähnlichen Systeme zweier Kreise.

Inverse Punkte. § 13.

a) Definition. S (Fig. 18) sei ein Aehnlichkeitspunkt der Kreise k und k'. Zu jedem Punkte A des einen Kreises

Fig. 18.



gehört auf dem Aehnlichkeitsstrahl SA ein entsprechender Punkt A' des andern Kreises. Der zweite Punkt B', in welchem der Kreis k' von dem Aehnlichkeitsstrahl SA getroffen wird, heisst „invers“ zu A. Auf jedem Aehnlichkeitsstrahle liegen zwei Paare inverser Punkte.

b) 1. Zwei Paare von Punkten, welche für einen Aehnlichkeitspunkt invers sind, liegen immer auf einem Kreise.

2. Zwei inverse Punkte und die Tangenten in denselben sind immer Punkte und Tangenten eines Kreises.

Beweis. In Figur 18 ist A invers zu B' und D invers zu C'. Um zu zeigen, dass $AB'C'D$ ein Sehnenviereck ist, hat man zu beweisen, dass die Gegenwinkel supplementär sind:

Die Winkel ADC und $A'B'C'$ sind einander gleich, weil beide dem Winkel $A'D'C'$ gleich sind (bezüglich als entsprechende Winkel und als Peripheriewinkel über demselben Bogen). Daraus folgt aber, dass der Nebenwinkel $C'DA$ von ADC und der Winkel $A'B'C'$ supplementär sind. Ebenso zeigt man, dass die Winkel DAB' und $B'C'D$ supplementär sind.

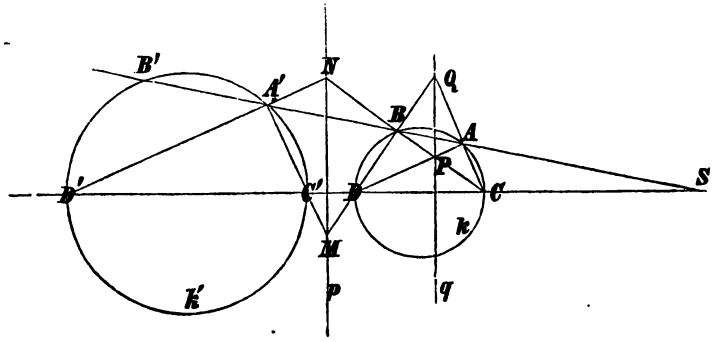
2) Die Punkte A, B', D', C liegen nach 1) auf einem Kreise c. Denkt man sich den Strahl SC um S gedreht, so ändern C und D' die Lage und auch der Kreis c ändert sich. Wenn bei dieser Drehung SC mit SA zusammenfällt, so fällt C mit A und D' mit B' zusammen und die Sehnen AC und $B'D'$ werden zu den Tangenten der Kreise in A und B'. Der Kreis c, welcher AC und $B'D'$ zu Sehnen hatte, verwandelt sich in einen Kreis, der durch A und B' geht und jene Tangenten in A und B' berührt.

c) Zusatz. Zwei inverse Sehnen (Tangenten) schneiden sich auf der Potenzlinie der beiden Kreise.

Beweis. Die inversen Sehnen AD und $B'C'$ (Fig. 18) sind die gemeinschaftlichen Sehnen des durch $AB'C'D$ gelegten Kreises einerseits und der Kreise k und k' andererseits. Dieselben müssen sich also in dem Potenzpunkt der drei Kreise treffen, welcher auf der Potenzlinie von k und k' gelegen ist.

d) Wenn ein Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise gegeben ist, so soll man seine Polaren in beiden Kreisen, sowie die Potenzlinie dieser Kreise mit dem Lineal allein construiren.

Fig. 19.



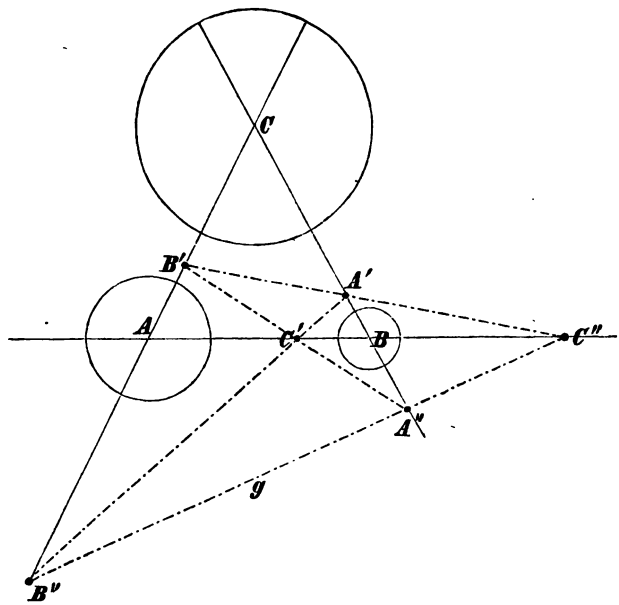
Auflösung. Der äussere Aehnlichkeitspunkt S (Fig. 19) sei gegeben. Die Centrale SC und ein zweiter Aehnlichkeits-

strahl bestimmen auf einem Kreise, z. B. auf k, die Ecken $ABDC$ eines vollständigen Vierecks und dadurch die Polare PQ (siehe § 12 c). Durch die Schnittpunkte der beiden Aehnlichkeitsstrahlen mit den Kreisen erhält man aber auch inverse Sehnen CB, $D'A'$ und BD, $A'C'$, welche zu den Punkten N und M der Potenzlinie führen.

e) Wenn die Potenzlinie zweier Kreise gegeben ist, so soll man die Aehnlichkeitspunkte und ihre Polaren mit dem Lineal allein construiren.

Auflösung. Die Verbindungslinien NC und ND' des Punktes N (Fig. 19) mit zwei Punkten C und D der Centralen, welche für den äussern Aehnlichkeitspunkt S invers sind, stellen inverse Sehnen für den Aehnlichkeitspunkt S vor und liefern auf den Kreisen zwei weitere inverse Punkte B und A'. Die Gerade BA' trifft die Centrale in dem gesuchten Punkte S. Die Polare von S für einen der Kreise wird nun construirt, wie bei d) angegeben wurde.

Fig. 20.



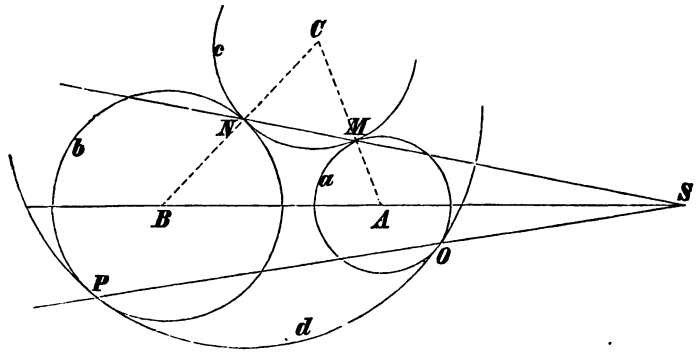
Aehnlichkeitsaxen dreier Kreise. § 14.

a) Drei Kreise geben 6 Aehnlichkeitspunkten den Ursprung. Die drei äussern Aehnlichkeitspunkte liegen auf einer Geraden. Desgleichen liegt je ein äusserer Aehnlich-

keitspunkt mit den beiden innern, welche ihm nicht zugehören, auf einer Geraden.

Beweis. A, B, C (Fig. 20) seien die Mittelpunkte dreier Kreise mit den Radien a, b, c. Die Aehnlichkeitspunkte C' und C'' theilen den Abstand AB innen und aussen nach dem Verhältniss $a : b$. Die Aehnlichkeitspunkte A' und A'' theilen BC innen und aussen nach dem Verhältniss $b : c$ und die Punkte $B'B''$ theilen CA innen und aussen nach dem Verhältniss $c : a$. Wir denken uns nun die Gerade $C''A''$ gezogen und mit g bezeichnet. Die Abstände dieser Geraden von A, B, C sollen d', d'', d''' heissen. Weil g durch C'' geht, so hat man $d' : d'' = a : b$; weil g durch A'' geht, so hat man $d'' : d''' = b : c$ (beides nach den Uebungen zu G. I, § 7 Ueb. 24*) Daraus folgt $d' : d'' : d''' = a : b : c$. Aus $d' : d''' = a : c$ folgt aber, dass g durch einen der Punkte B', B'' gehen muss, welche AC innen und aussen nach dem Verhältniss $a : c$ theilen. Nun lehrt aber die Anschauung, dass eine Transversale entweder zwei Dreiecksseiten und die Verlängerung der 3ten trifft, oder dass sie allen Dreiecksseiten nur in der Verlängerung begegnet. Folglich muss die Gerade g durch den Punkt B'' gehen. Ebenso werden die übrigen Fälle bewiesen.

Fig. 21.



b) Wenn zwei Kreise von einem dritten gleichartig (ungleichartig) berührt werden, so ist die Berührungssehne ein äusserer (innerer) Aehnlichkeitsstrahl der beiden Kreise und die Berührungspunkte sind inverse Punkte.

---

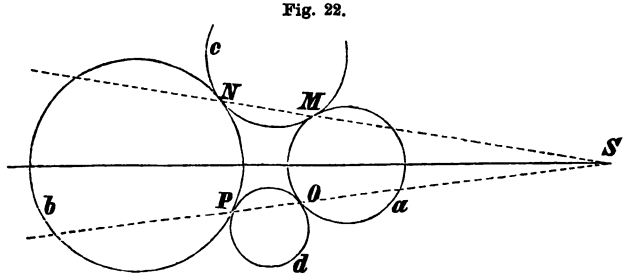
*) Diejenigen Geraden, deren Abstände von zwei festen Punkten A und B sich wie $a : b$ verhalten, bilden zwei Strahlenbüschel, deren Scheitel die Punkte sind, welche AB innen und aussen nach dem Verhältniss $a : b$ theilen.

Beweis. Wenn die beiden Kreise a und b (Fig. 21) durch c von aussen berührt werden, so sind M und N innere Aehnlichkeitspunkte und die Gerade MN geht nach Satz a) durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt S von a und b. Wenn a und b durch den Kreis d einschliessend berührt werden, so sind die Berührungspunkte O und P äussere Aehnlichkeitspunkte und ihre Verbindungslinie muss nach Satz a) durch den äussern Aehnlichkeitspunkt S von a und b gehen. Ebenso wird der Satz für die ungleichartige Berührung bewiesen. Die Berührungspunkte (z. B. M und N) können nicht entsprechende Punkte des Aehnlichkeitsstrahles SM sein, denn die Radien AM und BN sind nicht parallel, sondern schneiden sich im Mittelpunkte C des berührenden Kreises c. Die Berührungspunkte sind also invers (§ 13 a).

c) Wenn die Kreise a und b durch jeden der Kreise c und d gleichartig (ungleichartig) berührt werden, so ist die Potenzlinie von c und d ein äusserer (innerer) Aehnlichkeitsstrahl der Kreise a und b.

Beweis. Wenn a und b von c gleichartig berührt werden (Fig. 22), so geht die Berührungssehne MN durch den äussern

Fig. 22.



Aehnlichkeitspunkt S von a und b (Satz b). Ebenso geht PO durch S, wenn die Kreise a und b von d gleichartig berührt werden. Nun folgt aber auch aus Satz b, dass MN und PO inverse Sehnen der Kreise c und d sind*), welche sich nach

*) Wenn wie in Fig. 22 die Berührung durch c sowohl wie durch d eine äussere ist, so sind M und O nach Satz b inverse Punkte der Kreise c und d für den äussern Aehnlichkeitspunkt von c und d, denn alsdann werden c und d von dem Kreise a gleichartig berührt. Ebenso sind in diesem Falle N und P aus demselben Grunde inverse Punkte von c und d für den äussern Aehnlichkeitspunkt von c und d. Ist aber wie in Fig. 21 die Berührung von a und b durch c eine äussere und durch d eine innere, so sind M und O sowie N und P für den innern Aehnlichkeitspunkt von c und d invers.

§ 13 c auf der Potenzlinie von c und d schneiden müssen. Wenn aber S ein Punkt der Potenzlinie von c und d ist, so ist diese Potenzlinie ein äusserer Aehnlichkeitsstrahl von a und b.

d) Die Kreise a und b mögen von c gleichartig (ungleichartig) berührt werden. Wenn man nun den Kreis c und den Kreis a [oder b] als ähnliche Figuren auf einander bezieht, so entsprechen sich in diesen Figuren c und a [oder b] die Potenzlinie von a und b und die dem äussern (innern) Aehnlichkeitspunkte S zugehörige Polare von S in dem Kreise a [dem Kreise b].

Beweis. Wir beziehen c und a (Fig. 22) als ähnliche Figuren auf einander, so dass wir den Berührungspunkt M als Aehnlichkeitspunkt ansehen. NM ist dann eine sich selbst entsprechende Gerade. Dann entsprechen sich auch die Pole von MN für beide Kreise c und a (Anhang § 10 β, 1, G. I, § 50 c und § 48 Zusatz zu β). Der Pol von MN für den Kreis c liegt aber auf der Potenzlinie von a und b*) und der Pol von MN für den Kreis a liegt auf der Polaren von S (§ 11 c). Jene Potenzlinie und diese Polare entsprechen sich also als parallele Gerade, welche durch entsprechende Punkte gehen.

Da es nur einen Kreis gibt, der mit a den Punkt M zum Aehnlichkeitspunkt hat, wenn zugleich in beiden Kreisen zwei gegebene parallele Geraden sich entsprechen sollen, so kann der Satz d) auch umgekehrt werden:

e) Wenn der Kreis c einen von den Kreisen a und b, z. B. den Kreis a berührt und in den ähnlichen Systemen der beiden Kreise c und a jene besprochenen Geraden, nämlich die Potenzlinie von a und b und die Polare des äussern (innern) Aehnlichkeitspunktes S für den Kreis a sich entsprechen, so berührt c die beiden Kreise a und b gleichartig (ungleichartig).

V. Abschnitt.

Ellipse, Hyperbel und Parabel.

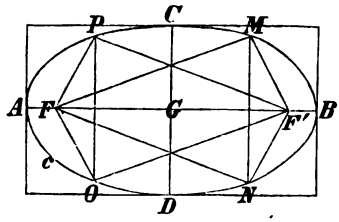
§ 15. Definition der Ellipse. — Brennpunkte.

a) Erklärung. Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Summe der Abstände von zwei festen Punkten eine gegebene Grösse hat.

*) M und N sind inverse Punkte von a und b. Die Tangenten in diesen Punkten schneiden sich auf der Potenzlinie von a und b.

Die beiden festen Punkte (F und F' in Fig. 23) heissen die Brennpunkte der Ellipse. Diejenigen Strecken (MF und MF'), welche einen Ellipsenpunkt (M) mit den beiden Brennpunkten verbinden, heissen die Leitstrahlen des Punktes. Die Hälfte der gegebenen Länge, welcher die Summe der Leitstrahlen eines Punktes immer gleich sein muss, wird gewöhnlich mit dem Buchstaben a bezeichnet. Die Hälfte des Abstandes (FF') der beiden Brennpunkte heisst die Excentricität der Ellipse. Ein Punkt der Ellipse bildet mit den beiden Brennpunkten ein Dreieck, dessen Grundlinie die doppelte Excentricität der Ellipse ist, während die beiden andern Seiten des Dreiecks durch die Leitstrahlen des Punktes dargestellt sind. Der constante Werth $2a$ der Summe dieser Leitstrahlen muss daher (G. I, § 14 d*) grösser als die doppelte Excentricität der Ellipse sein.

Fig. 23.



b) Aufgabe. Beliebig viele Punkte einer Ellipse zu construiren, wenn die beiden Brennpunkte und die Länge $2a$ gegeben sind.

Auflösung. r und r' seien zwei Strecken, deren Summe der Länge $2a$ gleich ist. Man beschreibe um den Brennpunkt F (Fig. 23) einen Kreis mit dem Radius r und mit r' einen solchen um den Brennpunkt F'. Die Schnittpunkte dieser Kreise sind zwei Punkte M und N der Ellipse, deren Abstand MN von FF' senkrecht halbirt wird (G. I, § 19 a). Verwechselt man bei dieser Construction die beiden Radien, so erhält man zwei andere Punkte P und O der Ellipse, deren Abstand ebenfalls von FF' senkrecht halbirt wird. Es ist noch zu bemerken, dass die beiden Kreise sich nicht mehr schneiden, sobald r so gross genommen wird, dass $r—r'$ die doppelte Excentricität FF' übertrifft.

Anmerkung. Eine sehr instructive Art, die Ellipse zu zeichnen ist die folgende. Man stecke an dem Ort der beiden Brennpunkte zwei Stifte ein und binde einen Faden zu einer Schleife, welche so lang ist als die doppelte Excentricität und die Länge $2a$ zusammengenommen. Wenn man diese Schleife über die beiden Stifte legt und mit einem dritten Stifte anzieht, so befindet sich der letztere in einem Punkte der Ellipse.

*) In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte.

§ 16. Axen der Ellipse.

a) Die Verbindungslinie der Brennpunkte (grosse Axe) und die Mittelsenkrechte des Abstandes FF' (kleine Axe) sind Symmetrieaxen der Figur. Der Schnittpunkt der Axen ist Mittelpunkt der Ellipse.

Beweis. Die Strecken MN und PO (Fig. 23) sind einander gleich und werden beide durch FF' senkrecht halbirt (§ 15 b, Auflösung). $MNOP$ ist also ein Rechteck, dessen Symmetrieaxen ff' und cd sich in dem Mittelpunkte desselben schneiden (G. I, § 30 a). Hieraus folgen die Behauptungen, wenn man bedenkt, dass zu jedem Punkte der Ellipse 3 andere gehören, welche mit ihm in derselben Weise ein Rechteck bilden (vergl. die Uebungen zu G. I, § 4, Ueb. 14).

b) Jede der beiden Axen schneidet die Ellipse in zwei Punkten (Scheitelpunkte der Ellipse). Die Scheitelpunkte der grossen Axe haben von dem Mittelpunkte der Ellipse die Entfernung a. Die Scheitelpunkte der kleinen Axe haben von jedem Brennpunkte dieselbe Entfernung a.

Beweis. (Fig. 23.) 1) Wenn $GA = GB = a$, so sind die Punkte A und B auf der Ellipse gelegen, denn es ist z. B. für den Punkt B: $FB + F'B = FB + FA = BA = 2a$ (§ 15 a).

2) Wenn $FC = F'C = a$, so ist der Punkt C auf der Ellipse gelegen, weil $FC + F'C = 2a$. Zugleich ist aber C nach G. I, § 20 b auf der Halbirungssenkrechten von FF', das heisst auf der kleinen Axe gelegen. Dasselbe gilt für den Punkt D.

§ 17. Tangenten der Ellipse.

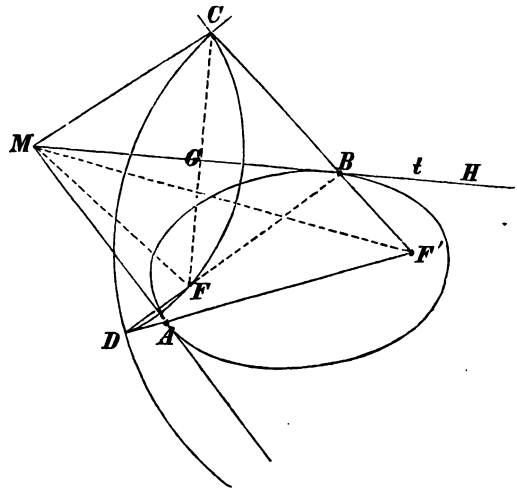
a) Jede Gerade t, für welche (als Symmetrieaxe betrachtet) der zu einem Brennpunkt F symmetrische Punkt (C in Fig. 24) von dem andern Brennpunkt F' die Entfernung $2a$ hat, trifft die Ellipse in einem einzigen Punkte. Die Gerade t heisst eine „Tangente“ *) der Ellipse, und der Ellipsenpunkt, welcher auf ihr liegt, heisst der „Berührungspunkt“ dieser Tangente. Der Berührungspunkt von t liegt auf der Geraden, welche den zu F symmetrischen Punkt (C in Fig. 24) mit F' verbindet.

---

*) Die Auffassung der Tangente als einer Geraden, welche die Ellipse in zwei zusammenfallenden Punkten trifft, ist durch die Uebungen, § 5, Ueb. 8 vermittelt.

Beweis (Fig. 24). C sei der für die Axe t zu F symmetrisch gelegene Punkt und die Strecke $F'C$, welche t in dem Punkte B schneidet, habe die Länge $2a$. Dann ist der Punkt B auf der Ellipse gelegen, denn weil $BF = BC$ (G. I, § 20 b),

Fig. 24.



so hat die Summe $F'B + FB$ der Leitstrahlen des Punktes B den Werth $F'B + BC = 2a$. Kein anderer Punkt M der Geraden t kann auf der Ellipse liegen, denn für ihn wäre $MF' + MF = MF' + MC$, und die Summe der Seiten MF' und MC in dem Dreieck $MF'C$ ist grösser als $F'C$ oder $2a$. Die Gerade t hat also den einzigen Punkt B mit der Ellipse gemein, das heisst, sie berührt die Ellipse in B.

Anmerkung. Die Tangenten der Ellipse in den Scheitelpunkten einer Axe stehen auf dieser Axe senkrecht. Um dies einzusehen, beachte man, dass die Geraden MP und MN in Fig. 23 bezüglich senkrecht auf der kleinen und der grossen Axe sind. Diese Geraden gehen aber in die Tangenten der Scheitelpunkte C und B über, wenn das einbeschriebene Rechteck $OPMN$ sich so verändert, dass der Punkt M dem Punkte C oder B sich unbegrenzt nähert.

b) Zusatz. Jeder Punkt desjenigen Kreises, welcher um einen Brennpunkt mit dem Radius $2a$ beschrieben ist, stellt in Bezug auf eine Tangente der Ellipse den zum andern Brennpunkt symmetrischen Punkt dar.

c) Diejenigen Winkel, welche eine Tangente der Ellipse mit

den Leitstrahlen ihres Berührungspunktes bildet, sind gleich gross.

Beweis. Die Winkel MBF und HBF' in Fig. 24 sind einander gleich, weil beide dem Winkel GBC gleich sind (bezüglich als Scheitelwinkel und aus Gründen der Symmetrie).

d) Aufgabe. In einem gegebenen Punkte einer Ellipse die Tangente an dieselbe zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 24.) Um in dem Punkte A die Tangente an die Ellipse zu zeichnen, ziehe man $F'A$ und mache auf dieser Richtung $F'D = 2a$. Der Punkt D ist der zu F symmetrische Punkt in Bezug auf die gesuchte Tangente. Die letztere selbst ist die Halbirungssenkrechte von FD (§ 17 a).

e) Aufgabe. Von einem Punkte M ausserhalb der Ellipse Tangenten an dieselbe zu ziehen.

Auflösung. M (Fig. 24) sei der gegebene Punkt und t eine der gesuchten Tangenten. C sei der in Bezug auf die Tangente zu F symmetrisch gelegene Punkt. Dann müssen C und F von M gleichen Abstand haben. C muss folglich auf einem Kreise liegen, der mit dem Radius MF um M beschrieben ist. Nach § 17 a muss aber C auch auf dem Kreise liegen, welcher um F' mit dem Radius $2a$ beschrieben ist. Beide Kreise schneiden sich in 2 Punkten C und D, welche die zu F in Bezug auf die gesuchten Tangenten symmetrischen Punkte sind. Die Tangenten selbst sind die Mittelsenkrechten von FC und FD.

f) Wenn man von einem Brennpunkte einer Ellipse gerade Linien nach den Berührungspunkten zweier Tangenten und nach ihrem Durchschnittspunkte zieht, so halbirt die letzte dieser 3 Geraden den Winkel der beiden ersten.

Beweis. (Fig. 24.) Die Dreiecke $MF'D$ und $MF'C$ haben entsprechend gleiche Seiten, weil $MD = MC = MF$, $F'D = F'C = 2a$ und die Seite MF' beiden gemeinsam ist. Die Winkel $MF'D$ und $MF'C$ sind also nach G. I, § 27 b einander gleich.

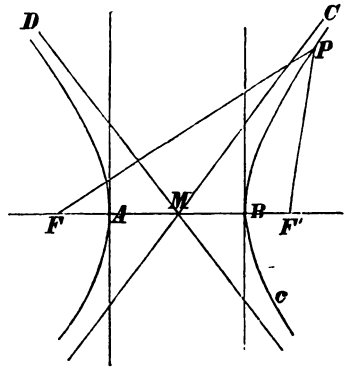
§ 18. Definition der Hyperbel. — Brennpunkte.

a) Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten eine gegebene Grösse hat.

Die beiden festen Punkte (F und F' in Fig. 25) heissen die Brennpunkte der Hyperbel. Diejenigen Strecken PF und PF', welche einen Hyperbelpunkt mit den beiden Brennpunkten verbinden, heissen die Leitstrahlen des Punktes. Die Hälfte der

gegebenen Länge, welcher die Differenz der Leitstrahlen eines Punktes immer gleich sein muss, wird gewöhnlich mit dem Buchstaben a bezeichnet. Die Hälfte des Abstandes FF' der beiden Brennpunkte heisst die Excentricität der Hyperbel. Ein Punkt der Hyperbel bildet mit den beiden Brennpunkten ein Dreieck, dessen Grundlinie die doppelte Excentricität der Hyperbel ist, während die beiden andern Seiten des Dreiecks durch die Leitstrahlen des Punktes dargestellt sind. Der Werth $2a$ der Differenz dieser Leitstrahlen muss daher (G. I, § 14 d) kleiner als die doppelte Excentricität der Hyperbel sein.

Fig. 25.



b) Aufgabe. Beliebig viele Punkte einer Hyperbel zu construiren, wenn die beiden Brennpunkte und die Länge $2a$ gegeben sind.

Auflösung. r und r' seien zwei Strecken, deren Differenz der Länge $2a$ gleich ist. Man beschreibe mit dem Radius r um den Brennpunkt F (Fig. 25) einen Kreis und mit r' einen solchen um den Brennpunkt F'. Die Schnittpunkte dieser Kreise sind zwei Punkte der Hyperbel, deren Abstand von FF' senkrecht halbirt wird (G. I, § 19 a). Verwechselt man bei dieser Construction die beiden Radien, so erhält man noch zwei andere Punkte der Hyperbel.

Es ist zu bemerken, dass die beiden Kreise sich nicht mehr schneiden, sobald r so klein genommen wird, dass die Summe $r + r'$ kleiner als die doppelte Excentricität FF' ist.

Anmerkung. Eine Erzeugung der Hyperbel durch stetige Bewegung eines Punktes ist die folgende: Man mache ein Lineal um den einen Brennpunkt F (Fig. 25) drehbar, so dass der Brennpunkt F genau in der Richtung der Kante des Lineals liegt. Auf dieser Kante nehme man in einer beträchtlichen Entfernung r den Punkt P an. In P befestige man einen Faden von einer solchen Länge r', dass $r - r'$ gerade der Strecke $2a$ gleich ist. Das zweite Ende des Fadens befestige man in F'. Wenn man das Lineal so lange dreht, bis der Faden gespannt wird, so befindet sich der Punkt P offenbar auf der zu beschreibenden Hyperbel. Dreht man nun das Lineal allmählich gegen F' und hält man den dadurch sich lockernden Faden mit einem an dem

Linealrande gleitenden Stifte gespannt, so beschreibt dieser Stift den Hyperbelbogen PB (Fig. 25).

§ 19. Axen der Hyperbel.

a) Die Verbindungslinie der Brennpunkte (Hauptaxe) und die Mittelsenkrechte des Abstandes FF' (Nebenaxe) der Hyperbel sind Symmetrieaxen der Figur. Der Schnittpunkt der Axen ist Mittelpunkt der Hyperbel.

Der Beweis ist demjenigen des entsprechenden Satzes für die Ellipse vollkommen analog.

b) Die Hauptaxe schneidet die Hyperbel in zwei Punkten (Scheitelpunkte der Hyperbel). Die Scheitelpunkte der Hauptaxe haben von dem Mittelpunkte der Hyperbel die Entfernung a. Die Nebenaxe trifft die Hyperbel nicht.

Beweis. (Fig. 25.) Wenn $MA = MB = a$, so liegen A und B auf der Hyperbel, denn $FB - F'B = FB - FA = AB = 2a$ (§ 18 a). Die Nebenaxe, welche in die Mittelsenkrechte von FF' fällt, kann die Hyperbel nicht treffen, weil für ihre Punkte die Differenz der Leitstrahlen Null ist.

§ 20. Tangenten der Hyperbel.

a) Jede Gerade t, für welche (als Symmetrieaxe betrachtet) der zu einem Brennpunkt F symmetrische Punkt (C in Fig. 26) von dem andern Brennpunkt F' die Entfernung $2a$ hat, trifft die Hyperbel in einem einzigen Punkte. Die Gerade t heisst eine „Tangente"*) der Hyperbel, und der Hyperbelpunkt, welcher auf ihr liegt, heisst der „Berührungspunkt" dieser Tangente. Der Berührungspunkt von t liegt auf der Geraden, welche den zu F symmetrischen Punkt (C in Fig. 26) mit F' verbindet.

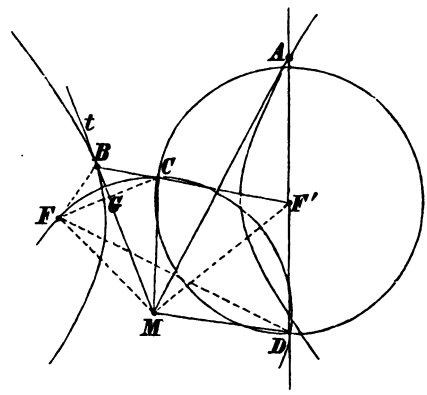
Beweis. (Fig. 26.) C sei der zum Brennpunkte F in Bezug auf die Gerade t symmetrische Punkt. Die Strecke $F'C$ habe die Länge $2a$ und ihre Verlängerung treffe die Gerade t in B. Dann ist B auf der Hyperbel gelegen, denn weil $BF = BC$, so hat die Differenz $F'B - FB$ den Werth $F'B - CB = F'C = 2a$. Kein anderer Punkt M der Geraden t kann auf der Hyperbel liegen, denn für ihn wäre $MF' - MF = MF' - MC$, und die Differenz der Seiten MF' und MC in dem Dreieck $MF'C$ ist kleiner als $F'C$ oder $2a$. Die Gerade t hat also den einzigen Punkt B mit der Hyperbel gemein, das heisst, sie berührt die Hyperbel in B.

*) Siehe die Uebungen, § 5, Ueb. 13.

Anmerkung. Die Tangenten der Hyperbel in den Scheitelpunkten der Hauptaxe stehen auf der Hauptaxe senkrecht.

Der Beweis ist demjenigen des entsprechenden Satzes für die Ellipse analog.

Fig. 26.



b) Zusatz. Jeder Punkt desjenigen Kreises, welcher um einen Brennpunkt mit dem Radius $2a$ beschrieben ist, stellt in Bezug auf eine Tangente der Hyperbel den zum andern Brennpunkt symmetrischen Punkt dar.

c) Diejenigen Winkel, welche eine Tangente der Hyperbel mit den Leitstrahlen ihres Berührungspunktes bildet, sind gleich gross.

Beweis. Die Gleichheit der Winkel $F'BG$ und FBG in Fig. 26 folgt aus Gründen der Symmetrie.

d) Aufgabe. In einem gegebenen Punkte der Hyperbel eine Tangente an dieselbe zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 26.) B sei der gegebene Punkt. Man ziehe einen Leitstrahl $F'B$ des Punktes B (in diesem Falle den grösseren Leitstrahl) und schneide auf demselben die Länge $2a$ von F' aus ab. Der gefundene Punkt C ist der zu F symmetrische Punkt in Bezug auf die gesuchte Tangente. Diese selbst ist die Halbirungssenkrechte von CF (§ 20, a und b).

e) Aufgabe. Von einem Punkte ausserhalb der Hyperbel Tangenten an dieselbe zu legen.

Auflösung. Man beschreibe um den gegebenen Punkt M (Fig. 26) einen Kreis, der durch den einen Brennpunkt F geht. Die Schnittpunkte C und D dieses Kreises und desjenigen, welcher mit dem Radius $2a$ um F' beschrieben ist, sind die zu F symmetrischen Punkte in Bezug auf die gesuchten Tangenten. Diese selbst sind die Halbirungssenkrechten der Strecken FC und FD. Der Beweis wird geführt, wie bei § 17 e.

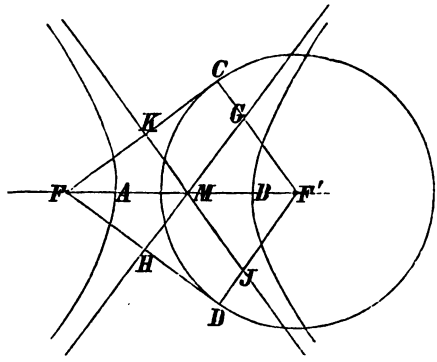
f) Wenn man von einem Brennpunkte einer Hyperbel gerade Linien nach den Berührungspunkten zweier Tangenten und nach ihrem Schnittpunkte zieht, so halbirt die letzte dieser drei Geraden den Winkel der beiden ersten.

Der Beweis ist demjenigen von § 17 f analog.

§ 21. Die Asymptoten der Hyperbel.

a) Durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehen zwei Tangenten, welche die Hyperbel in unendlich fernen Punkten berühren, die Asymptoten der Hyperbel.

Fig. 27.



Beweis. Man ziehe um den Brennpunkt F' (Fig. 27) mit dem Radius $2a$ einen Kreis und lege von F die Tangenten FC und FD an denselben, C und D sind die zu F symmetrischen Punkte in Bezug auf zwei Tangenten JK und GH (§ 20 b), welche durch den Mittelpunkt M gehen (G. I, § 40 b). Da die Radien $F'C$ und $F'D$ mit den gefundenen Hyperbeltangenten parallel sind, so deuten sie unendlich ferne Berührungspunkte derselben an.

b) Zusatz. Die von einem Brennpunkte der Hyperbel auf eine Asymptote gefällte Senkrechte schneidet von dieser Asymptote ein Stück ab, welches der Hälfte der Hauptaxe gleich ist.

Beweis. Nach G. I, § 40 β ist MK (Fig. 27) die Hälfte von $F'C$, woraus die Behauptung folgt, da $F'C = 2a$.

c) Aufgabe. Eine Hyperbel zu zeichnen, wenn ihre Scheitelpunkte und die beiden Asymptoten bekannt sind.

Auflösung. (Fig. 27.) Man trage auf einer der Asymptoten von dem Mittelpunkte aus die Länge $MK = a$ ab und errichte in dem Punkte K eine Senkrechte auf die Asymptote, welche nach b) die Hauptaxe in einem Brennpunkte trifft. Analog findet man den andern Brennpunkt und verfährt nach § 18 b.

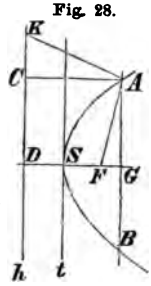
§ 22. Definition der Parabel. — Brennpunkt.

a) Erklärung. Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, welche von einer festen Geraden ebensoweit entfernt sind, als von einem festen Punkte.

Die feste Gerade (h in Fig. 28) heisst die Leitlinie der Parabel. Der feste Punkt F ist ihr Brennpunkt. Die von einem Parabelpunkte A nach dem Brennpunkte gezogene Strecke AF

heisst der Leitstrahl des Parabelpunktes. Jeder Punkt der Parabel ist die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks FAC, dessen beide Schenkel durch den Leitstrahl und die Entfernung des Parabelpunktes von der Leitlinie gebildet sind. Die von dem Brennpunkte auf die Leitlinie gefällte Senkrechte FD heisst die Axe der Parabel.

Fig. 28.



b) Aufgabe. Beliebig viele Punkte der Parabel zu construiren, wenn der Brennpunkt und die Leitlinie gegeben sind.

Auflösung. (Fig. 28.) Man ziehe auf der dem Brennpunkte zugekehrten Seite der Leitlinie eine Parallele zu derselben in einer beliebigen Entfernung DG. Mit derselben Entfernung als Radius ziehe man um den Brennpunkt einen Kreis, dessen Schnittpunkte A und B mit jener Parallelen auf der Parabel liegen. Der Abstand AB wird durch die Axe der Parabel senkrecht halbirt. Es ist zu bemerken, dass der Kreis und die Parallele sich nicht treffen, wenn der Abstand der Parallelen von der Leitlinie kleiner ist, als ihr Abstand von dem Brennpunkte.

Anmerkung. Man kann die Parabel auf folgende Weise durch stetige Bewegung eines Pnnktes erzeugen. An dem einen Endpunkte der Hypotenuse eines Winkeldreiecks befestige man einen Faden, welcher der anliegenden Kathete an Länge gleich ist. Das andere Ende des Fadens befestige man in dem Brennpunkte der Parabel. Wenn nun das Winkeldreieck mit der zweiten Kathete an die Leitlinie angelegt und an einem Lineal längs der Leitlinie so lange verschoben wird, bis sich der Faden spannt (AKC in Fig. 28 stellt diese Lage des Winkeldreiecks dar), so befindet sich das an dem Winkeldreieck befestigte Ende (A) desselben in einem Parabelpunkte. Man verschiebe nun das Winkeldreieck gegen den Brennpunkt hin und halte den sich lockernden Faden dadurch gespannt, dass man ihn mit einem Stifte gegen die Kathete (AC) des Winkeldreiecks andrückt. Der an dieser Kathete hingleitende Stift wird dabei einen Bogen der Parabel beschreiben.

c) Die Punkte der Parabel liegen paarweise symmetrisch gegen die Axe der Parabel. Die Axe trifft die Parabel nur in einem Punkte, welcher der Scheitelpunkt der Parabel heisst.

Beweis. (Fig. 28.) Dass DG die Mittelsenkrechte von AB ist, folgt unmittelbar aus der Construction der Parabelpunkte A und B. Derjenige Punkt S der Axe, welcher in der Mitte zwischen

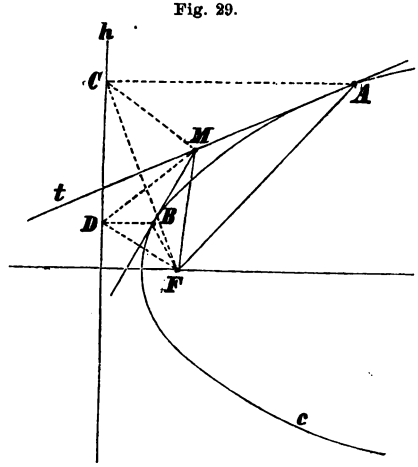
dem Brennpunkte der Parabel und der Leitlinie liegt, ist offenbar der einzige Punkt, welchen die Axe mit der Parabel gemein haben kann.

§ 23. Tangenten an die Parabel.

a) Jede Gerade t, für welche (als Symmetrieaxe betrachtet) der zu dem Brennpunkte F symmetrische Punkt (C in Fig. 29) auf der Leitlinie gelegen ist, trifft die Parabel in einem einzigen Punkte. Die Gerade t heisst eine „Tangente"*) der Parabel, und der Parabelpunkt, welcher auf ihr gelegen ist, heisst ihr Berührungspunkt. Der Berührungspunkt von t liegt auf der Geraden, welche durch den zu F symmetrischen Punkt C parallel zur Parabelaxe gezogen ist.

Beweis. (Fig. 29.) Der Punkt C sei auf der Leitlinie h der Parabel gelegen und AM sei die Halbirungssenkrechte von FC; CA sei mit der Axe der Parabel parallel, also auf der Leitlinie senkrecht.

Fig. 29.



Dann ist (G. I § 20 b) $AC = AF$, das heisst der Punkt A ist auf der Parabel gelegen. Wäre noch ein anderer Punkt M der Geraden AM auf der Parabel gelegen, so müsste die Strecke MC der senkrechten Entfernung des Punktes M von der Leitlinie gleich sein, weil beide, bezüglich nach G. I, § 20 b und der Definition der Parabel der Strecke MF gleich sein würden. Dies widerspricht aber G. I, § 14 c und M kann folglich kein Punkt der Parabel sein. Die Gerade AM hat also den einzigen Punkt A mit der Parabel gemein, das heisst sie ist die Tangente der Parabel in diesem Punkte.

Anmerkung. Die Tangente der Parabel im Scheitelpunkte S (Fig. 28), welche die „Scheiteltangente" heisst, steht senkrecht auf der Axe, denn die bei der Construction der Parabelpunkte erhaltene Sehne AB, welche durch die Axe der Parabel senkrecht halbirt wird, geht in die Scheiteltangente über, sobald

*) Siehe die Uebungen, § 5, Ueb. 16.

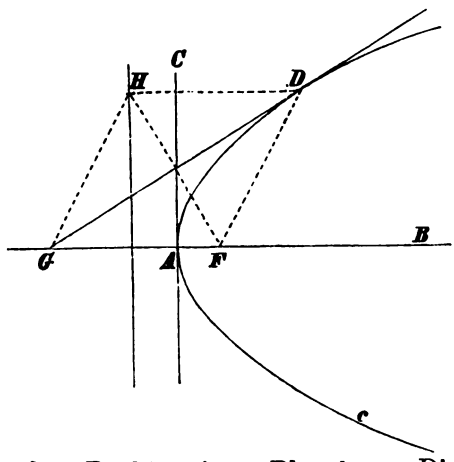
der eine Endpunkt dieser Sehne sich dem Scheitelpunkte unbegrenzt nähert.

b) Zusatz. Jeder Punkt der Leitlinie ist Gegenpunkt des Brennpunktes in Bezug auf eine Tangente der Parabel.

c) Diejenigen Winkel, welche die Tangente mit dem Leitstrahle des Berührungspunktes und der Axe der Parabel bildet, sind gleich gross.

Beweis. (Fig. 30.) Wenn D der Berührungspunkt der Tangente DG und H der zu F in Bezug auf DG symmetrische Punkt ist, so ist HD mit der Axe AB parallel (a). Aus der Gleichheit der Winkel HDG und GDF (G. I, § 11 β) und der Gleichheit der Wechselwinkel HDG und DGB (G. I, § 8 β) folgt die Behauptung.

Fig. 30.



d) Zusatz. Der Berührungspunkt der Tangente und ihr Schnittpunkt mit der Axe bilden mit dem Brennpunkte und seinem für die Tangente symmetrisch entsprechenden Punkte einen Rhombus. Die Scheiteltangente geht durch den Mittelpunkt desselben.

Beweis. (Fig. 30.) Aus der Gleichheit der Winkel DGF und GDF folgt die Gleichheit der Seiten GF und FD (G. I, § 14 β). Da aber FD auch HD gleich und HD mit der Axe parallel ist, so folgt aus G. I, § 29 b, 1), dass $GFDH$ ein Parallelogramm mit gleichen Seiten oder ein Rhombus ist. Die Scheiteltangente ist mit der Leitlinie parallel und halbirt den Abstand des Brennpunktes von derselben. Sie wird daher nach G. I, § 40 b auch die Diagonale HF halbiren, das heisst durch den Mittelpunkt des Rhombus gehen.

e) Aufgabe. In einem Punkte der Parabel die Tangente an dieselbe zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 29.) Man fälle von dem Punkte A, dessen Tangente bestimmt werden soll, eine Senkrechte AC auf die Leitlinie und ziehe den Leitstrahl AF. Die Tangente halbirt den gebildeten Winkel CAF (c).

f) Aufgabe. Von einem Punkte ausserhalb der Parabel Tangenten an dieselbe zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 29.) M sei der gegebene Punkt. Die für die gesuchten Tangenten zu F symmetrischen Punkte sind die Schnittpunkte C und D der Leitlinie und eines um M mit dem Radius MF beschriebenen Kreises (§ 23, a und b). Die Tangenten selbst sind die Halbirungssenkrechten der Strecken FC und FD.

g) Aufgabe. Eine Parabel zu zeichnen, von welcher der Scheitelpunkt und ein beliebiger anderer Punkt, sowie die Tangenten dieser Punkte gegeben sind.

Auflösung. (Fig. 30.) A sei der Scheitelpunkt und D der zweite gegebene Punkt. AC und DG seien die Tangenten dieser Punkte. Man errichte in dem Schnittpunkt beider Tangenten eine Senkrechte auf DG, so wird dieselbe mit der in A auf der Scheiteltangente errichteten Senkrechten AB den Brennpunkt F bestimmen. Der zu dem Brennpunkte in Bezug auf die Tangente DG symmetrische Punkt ist auf der Leitlinie gelegen. Die Parabel kann nun nach § 22 b construirt werden.

h) Wenn man von dem Brennpunkte einer Parabel gerade Linien nach den Berührungspunkten zweier Tangenten und nach ihrem Schnittpunkte zieht, so halbirt die letzte dieser drei Geraden den Winkel der beiden andern.

Beweis. (Fig. 29.) Nach der Auflösung zu Aufgabe f) ist CMD ein gleichschenkliges Dreieck. Die Winkel ACM und BDM sind gleich, weil sie die Winkel an der Grundlinie dieses gleichschenkligen Dreiecks zu 90^0 ergänzen. Da nun aber $\sphericalangle ACM = AFM$ und $\sphericalangle BDM = BFM$, so müssen auch die Winkel AFM und BFM einander gleich sein, was zu beweisen war.

Uebungen.

Mit zwei lithographirten Tafeln.

Uebungen zu Abschnitt I (harmonische Strahlen, vollständiges Viereck und Vierseit). § 1.

1) Wenn man durch einen Eckpunkt eines Dreiecks die Mittellinie und die Parallele zu der gegenüberliegenden Seite zieht, so erhält man vier harmonische Strahlen (§ 2 a, 2 und § 2 b).

2) Wenn man vier harmonische Strahlen durch eine Gerade schneidet, welche mit einem derselben parallel ist, so halbirt der zugeordnete Strahl den zwischen den beiden übrigen Strahlen gelegenen Abschnitt.

3) Die Seiten MA und MB eines Parallelogramms (Fig. 2), die Diagonale MD und die durch M zur zweiten Diagonale gezogene Parallele MC bilden 4 harmonische Strahlen.

Andeutung. - MD ist der zur Sehnenrichtung AB conjugirte Durchmesser. MC ist mit AB parallel.

4) Es sind drei Strahlen a, b, c gegeben. Man soll zu c den zugehörigen harmonischen Strahl suchen und dazu 3) benützen.

5) Für jeden Punkt auf der Diagonale (Fig. 1) AC des Parallelogramms $ABCD$ ist das Verhältniss der Abstände r und s von den Seiten AB und AD dem umgekehrten Verhältniss dieser Seiten gleich: $r : s = n : m$.

Andeutung. Für den Punkt C folgt dies daraus, dass $m \cdot r = n \cdot s$, weil beide Producte gleich dem doppelten Inhalt der gleichen Dreiecke ABC und ADC sind. Für jeden andern Punkt der Diagonale folgt die Behauptung aus G. I, Uebungen § 7, Ueb. 19.

6) Der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstandsverhältniss von den convergenten Geraden a und b den Werth $m : n$ hat, besteht nach G. I, Uebungen § 7, Ueb. 23 aus 2 Graden c und d. Dieselben bilden mit a und b vier harmonische Strahlen.

Andeutung. (Fig. 2.) Man trage m und n verwechselt auf den Geraden ab, nämlich n auf a nach MA und MA' und m auf b nach MB. Sodann zeichne man die Parallelogramme $MADB$ und $MBCA'$. Nach Uebung 5 stellen die Diagonalen MD und MC den geometrischen Ort dar. Man bemerke nun, dass auch $ABCM$ ein Parallelogramm ist, weil MA und CB gleich und parallel sind. Die Strahlen a, b, c, d sind also vier harmonische Strahlen, weil MC und AB parallel sind (Ueb. 3).

7) Aus 6) folgt noch, dass jedem Paare von Geraden, welche mit a und b 4 harmonische Strahlen bilden, ein eigenes Abstandsverhältniss zukommt. Dem Strahlenpaare, welches die Winkel der Geraden a und b halbirt, gehört das Abstandsverhältniss 1 zu.

8) Man betrachte in dem vollständigen Viereck $MNOP$, Fig. 3, das durch die Nebenecken A, B, C gebildete Dreieck. Für jeden der Eckpunkte des Vierecks stehen die Abstände von den Seiten jenes Dreiecks in demselben Verhältniss.

Andeutung. Durch C gehen zwei Seiten c' und c'' des Vierecks. Für die Punkte auf c' möge das Verhältniss der Abstände x und y von den Geraden a und b den Werth $m : n$,

$$x : y = m : n \ldots 1)$$

haben. Dann findet für die Punkte von c'' nach Uebung 6 und 7 dasselbe statt, weil a, b, c', c'' vier harmonische Strahlen sind. Durch den Eckpunkt B gehen die Gegenseiten b' und b''. Alle Punkte von b' haben ein gewisses Verhältniss der Abstände x und z von a und c, welches man in die Form $m : p$ bringen kann, weil ja das erste Glied dieses Verhältnisses wählbar ist. Man hat also

$$x : z = m : p \ldots 2)$$

Dasselbe gilt für die Punkte von b'', weil a, b, c', c'' vier harmonische Strahlen sind. Für jeden der 4 Punkte M, N, O, P, in welchen eine der Geraden c' und c'' von einer der Geraden b', b'' getroffen wird, gelten die Gleichungen 1) und 2) zugleich, d. h. $x : y : z = m : n : p$, was zu beweisen war.

9) Man betrachte in dem vollständigen Vierseit m, n, o, p (Fig. 4) das durch die Diagonalen gebildete Dreieck ABC. Für jede der Seiten m, n, o, p stehen die Abstände von den Ecken des Dreiecks ABC in demselben Verhältniss.

Andeutung. Für jede durch einen der Punkte C' oder C'' gehende Gerade hat das Verhältniss der Abstände x und y von den Punkten A und B denselben Werth $m : n$ (Uebungen zu G. I, § 7, Ueb. 24). Für jede Gerade, die durch einen der Punkte B' oder B'' geht, hat das Verhältniss der Abstände x und z von A und C einen Werth, den man in der Form $m : p$ schreiben kann. Für diejenigen Geraden m, n, o, p, welche einen der Punkte C' und C'' mit einem der Punkte B' und B'' verbinden, gilt also die Proportion $x : y : z = n : m : p$.

10) Wenn die 3 Punkte F, D, O in Fig. 6 auf Seite 6 gegeben sind, so soll man den zu O zugehörigen 4ten harmonischen Punkt durch das Lineal allein finden.

Andeutung. Ziehe FB und FC durch F und DA durch D beliebig. Ziehe durch O und den erhaltenen Schnittpunkt E

die Gerade OE, welche den Punkt B bestimmt. Durch die Verbindungslinie DB kommt man zu dem Schnittpunkte C und nun bestimmt die Gerade AC den 4ten harmonischen Punkt N.

11) Wenn die 3 Strahlen NA, ND, NP in Fig. 5 auf Seite 6 gegeben sind, so soll man den zu NP zugehörigen 4ten harmonischen Strahl finden.

Andeutung. Nimm die Punkte A, D, C, B auf den beiden Strahlen NA und ND so an, dass die Geraden AB und DC sich auf dem Strahle NP (in M) schneiden. Der Schnittpunkt von AD und BC liegt dann auf dem gesuchten 4ten harmonischen Strahle.

12) α) Wenn man die Höhen eines Dreiecks zieht und die Fusspunkte derselben durch gerade Linien verbindet, so hat man in jedem dieser Fusspunkte 4 harmonische Strahlen erhalten.

β) Den analogen Satz für die Mittellinien eines Dreiecks (welche sich in dem Schwerpunkte schneiden) auszusprechen und zu beweisen.

γ) Wenn in einem Viereck eine Seite durch diejenige Gerade halbirt wird, welche den Schnittpunkt der anliegenden Seiten mit dem Schnittpunkte der Diagonalen verbindet, so ist das Viereck ein Trapez.

13) Diejenigen Geraden, welche die Nebenecken eines vollständigen Vierecks verbinden, bestimmen auf den Seiten desselben 6 Punkte, welche die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden.

14) Diejenigen Punkte, in welchen die Diagonalen eines vollständigen Vierseits sich schneiden, liefern durch ihre Verbindung mit den Ecken des Vierseits 6 gerade Linien, welche Seiten eines vollständigen Vierecks sind.

15) Von einem vollständigen Viereck sind die Nebenecken und ein Eckpunkt gegeben. Man soll dasselbe zeichnen.

16) Von einem vollständigen Vierseit sind die Diagonalen und eine Seite gegeben. Man soll dasselbe zeichnen.

17) Von vier harmonischen Strahlen ist der eine gegeben, sowie die Bedingung, dass die übrigen Strahlen durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte gehen sollen. Man soll die drei fehlenden Strahlen zeichnen.

18) Von vier harmonischen Punkten ist der eine gegeben, sowie die Bedingung, dass die übrigen Punkte auf drei nicht durch einen Punkt gehenden Geraden liegen sollen. Man soll die fehlenden Punkte bestimmen.

19) Auf dem Felde sind zwei Punkte A und B durch Visirstäbe bezeichnet. Obgleich man eines Hindernisses wegen nicht längs der Linie AB visiren kann, so soll dennoch mit alleiniger Hülfe von Visirstäben der Schnittpunkt der Geraden AB mit einer andern ausgesteckten Geraden g bestimmt werden.

Andeutung. Man stecke ein vollständiges Vierseit ab, von welchem A und B zwei Gegenpunkte sind, während ein zweites Paar von Gegenpunkten beliebig auf g angenommen wird. Nach § 4β wird nun die Aufgabe durch das Aufsuchen eines vierten harmonischen Punktes auf der dritten Diagonalen des Vierseits zu lösen sein.

20) Von einem gegebenen Punkte M aus eine Gerade nach dem unzugänglichen Convergenzpunkt zweier gegebenen Geraden zu ziehen.

21) Wenn die Träger der Seiten eines Dreiecks ABC (Fig. 5) von einer Transversalen in den Punkten A', B', C' getroffen werden, so ist das Product $\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A}$ der drei Abstandsverhältnisse $\frac{C'A}{C'B}$, $\frac{A'B}{A'C}$ und $\frac{B'C}{B'A}$ der Einheit gleich (Satz des Menelaus).

Andeutung. Ziehe BD parallel zu der Transversalen. Aus G. I, § 41 b folgt:

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{B'A}{B'D} \cdots 1)$$

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{B'D}{B'C} \cdots 2)$$

Das dritte Abstandsverhältniss lässt man unverändert.

$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{B'C}{B'A} \cdots 3)$$

Multiplicirt man die 3 Gleichungen mit einander, so erhält man, weil sich auf der rechten Seite alles weghebt,

$$\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} = 1 .$$

22) Wenn die Träger der Seiten des Dreiecks ABC (Fig. 6) von den Geraden AS, BS, CS (S ist ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks) in den Punkten A', B', C' getroffen werden, so ist das Product $\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A}$ der drei Abstandsverhältnisse der Einheit gleich (Satz des Ceva).

Andeutung. Von dem Punkte S aus wird das Dreieck ABC in drei Dreiecke getheilt, deren Flächen α, β, γ heissen sollen. Man hat nun nach den Uebungen zu G. I, § 6, Ueb. 38

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{C'A}{C'B},$$

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{B'C}{B'A},$$

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{A'B}{A'C}.$$

Durch Multiplication der Gleichungen erhält man das Resultat, da links sich alles forthebt.

23) Wenn man die Abstandsverhältnisse in Uebung 21 und 22 nicht nur nach Grösse, sondern auch nach Vorzeichen bestimmt, so wird das Product $\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A}$ in Uebung 21 den Werth $+1$, dagegen in Uebung 22 den Werth -1 erhalten.

Andeutung. 1) Für Uebung 21: Die Transversale schneidet alle Dreiecksseiten in der Verlängerung oder eine in der Verlängerung, die andern beiden aber innerhalb. Also sind alle drei Abstandsverhältnisse positiv oder zwei derselben sind negativ, das dritte aber positiv. 2) Für Uebung 22: Die Träger der Dreiecksseiten theilen die Ebene in 7 Felder. Man nehme den Punkt S nach einander in diesen Feldern an und überzeuge sich, dass entweder alle 3 Punkte A', B', C' innerhalb der Dreiecksseiten liegen oder dass zwei derselben in den Verlängerungen, der dritte aber auf einer Dreiecksseite selbst liegt. Daraus folgt, dass die drei Abstandsverhältnisse negativ sind, oder dass zwei positiv sind, während das dritte negativ ist.

24) Die Sätze in Uebung 21 und 22 lassen sich umkehren. Wenn für die Punkte A', B', C' auf den Trägern der Dreiecksseiten die Gleichung $\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} = \pm 1$ gilt, so liegen die Punkte A', B', C' auf einer Geraden oder die Strahlen AA', BB', CC' gehen durch einen Punkt.

Andeutung. Für den Fall, wo $\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} = +1$: Die Gerade $C'A'$ schneide den Träger der dritten Seite in X. Dann hat man nach Ueb. 21) und 23) $\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{XC}{XA} = +1$. Aus den beiden Gleichungen ergibt sich, dass $\frac{B'C}{B'A} = \frac{XC}{XA}$. Wenn aber die Punkte B' und X der Geraden AC gleiche Abstandsverhältnisse in Bezug auf A und B haben, so fallen sie zusammen.

25) Wenn man irgend einen von den drei Punkten A', B', C' in Fig. 6 mit dem zugehörigen vierten harmonischen Punkte vertauscht, so liegt dieser mit den beiden übrigen auf einer Geraden.

26) Wenn man irgend einen von den drei Punkten A', B', C' in Fig. 5 mit dem zugehörigen vierten harmonischen vertauscht und diesen, sowie die beiden übrigen Punkte mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks durch Gerade verbindet, so gehen diese letzteren durch einen Punkt.

27) Wenn man die drei Punkte A', B', C' in Fig. 5 mit den zugehörigen vierten harmonischen Punkten vertauscht und

diese letzteren mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks durch Gerade verbindet, so gehen diese durch einen Punkt.

28) Eine Seite des Dreiecks wird durch die zugehörige Höhe und die Verbindungslinie der Fusspunkte der beiden andern Höhen harmonisch getheilt.

29) Diejenigen Geraden, welche die Ecken eines Dreiecks mit den Berührungspunkten der Kreise verbinden, welche den gegenüberliegenden Seiten anbeschrieben sind, schneiden sich in einem Punkte (Uebungen zu G. I, § 3, Ueb. 14γ).

30) Die drei Punkte, in welchen die Seiten eines Dreiecks durch diejenigen Geraden geschnitten werden, welche die Fusspunkte der Höhen paarweise verbinden, liegen auf einer Geraden.

31) Diejenigen Punkte, in welchen die Seiten eines Dreiecks von den Halbirungslinien der Aussenwinkel an den gegenüberliegenden Eckpunkten getroffen werden, liegen in einer Geraden.

---

§ 2. Uebungen zu Abschnitt II (Potenzlinien).

1) A und B in Fig. 7 seien die Mittelpunkte zweier Kreise mit den Radien r und r'. DM sei die Potenzlinie der Kreise. Man soll die Abstände $DA = d$ und $DB = d'$ bestimmen, wenn der Centralabstand AB den Werth c hat.

Andeutung. Nach dem Beweise zu § 5 a hat man $d^2 - r^2 = d'^2 - r'^2$. Verbindet man damit die Gleichung $d + d' = c$, so erhält man:

$$d = \frac{c^2 + r^2 - r'^2}{2c} \text{ und } d' = \frac{c^2 + r'^2 - r^2}{2c}.$$

2) Rechnet man in 1) den Abstand d positiv oder negativ, je nachdem D rechts oder links von A liegt, und den Abstand d' positiv oder negativ, je nachdem D links oder rechts von B gelegen ist, so gelten die Gleichungen und die Lösungen in 1 für alle Fälle. Ist z. B. das Resultat für d negativ, so spricht dies aus, dass D links von A gelegen ist. Man betrachte auch besonders den Fall, wo d (oder d') Null ist, welcher Werth den Uebergang zwischen den positiven und negativen Werthen von d bildet.

3) Betrachte in 1) besonders die Fälle, wo α) $r = r'$ und β), wo $r' = 0$.

Andeutung. Im Falle β) bringe man das Resultat mit der leicht zu erkennenden Thatsache in Einklang, dass die Potenzlinie die beiden Tangentenabschnitte halbirt, welche von dem Punkte B bis zu dem Kreise um A reichen.

4) Die Lage der Punkte zu bestimmen, in welchen die beiden Kreise in 1) von der Potenzlinie getroffen werden.

Andeutung. M sei ein Schnittpunkt des Kreises um A mit der Potenzlinie. Wir wollen den Abstand $DM = h$ positiv oder negativ nehmen, je nachdem DM nach oben oder unten fällt. Man hat dann für beide Fälle die Gleichung $h^2 = r^2 - d^2$, woraus sich $h = \pm\sqrt{r^2 - d^2}$ ergibt. Wenn M' ein Schnittpunkt von der Potenzlinie mit dem Kreise um B ist, so hat man für $DM' = h$ ebenso $h = \pm\sqrt{r'^2 - d'^2}$. Man zeige, dass die beiden absoluten Werthe für h gleich sind, so dass auch durch diese Rechnung die Potenzlinie sich als gemeinsame Sehne ergibt.

Bemerkung. Wenn der gemeinsame absolute Werth der Abstände h imaginär ist (Fall, wo die Kreise sich nicht treffen), so spricht man von imaginären Schnittpunkten der Kreise mit der Potenzlinie. Wegen der Gleichheit der „imaginären Abstände" h sagt man auch, die Potenzlinie treffe beide Kreise in denselben imaginären Schnittpunkten und die Potenzlinie sei als imaginäre (ideelle) gemeinsame Sehne aufzufassen. Man betrachte besonders den Fall, wo $h = 0$, welcher die Fälle der wirklichen und ideellen gemeinsamen Sehnen von einander trennt.

5) Wenn man durch einen Punkt M der Potenzlinie der Kreise a und b eine Secante von a und eine Secante von b zieht, so liegen die 4 Schnittpunkte auf einem neuen Kreise.

6) Wenn man durch den Punkt M in 5) eine Tangente an a und eine Tangente an b zieht, so sind diese Tangenten und ihre Berührungspunkte einem neuen Kreise angehörig (welcher a und b berührt).

7) Die Potenzlinie der Kreise a und b ist der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise c, welche a und b rechtwinklig schneiden.

Andeutung. Wenn a und b von c rechtwinklig geschnitten werden, so sind die in c nach den Schnittpunkten gezogenen Radien Tangenten von a und b. Diese Tangenten also sind gleich lang, folglich liegt der Mittelpunkt von c auf der Potenzlinie von a und b. Umgekehrt ist aus der Gleichheit der von einem Punkte C der Potenzlinie an die Kreise gezogenen Tangenten leicht zu schliessen, dass C der Mittelpunkt eines Kreises ist, der a und b rechtwinklig schneidet.

8) Einen Kreis c zu zeichnen, welcher durch die Punkte A und B geht und einen gegebenen Kreis a berührt (Fig. 8).

Andeutung. Man suche die gemeinsame Tangente von a und c zu bestimmen. Sie geht durch den Potenzpunkt der Kreise a, c und des Kreises b, welcher so durch A und B gezogen ist,

dass er a in zwei Punkten C und D schneidet. Dieser Potenzpunkt ist aber leicht zu finden, er ist der Schnittpunkt von AB und CD. Man erhält 1) zwei getrennte, 2) zwei zusammenfallende oder 3) gar keine Lösung, je nachdem man von dem gefundenen Potenzpunkte zwei, eine oder keine Tangente an den Kreis a ziehen kann. 1) findet statt, wenn beide Punkte A und B innerhalb oder beide ausserhalb des Kreises a liegen. 2) tritt ein, wenn einer der Punkte A und B auf a gelegen ist. 3) tritt ein, wenn einer der Punkte A, B innerhalb, der andere aber ausserhalb des Kreises a gelegen ist.

9) Die Potenzlinie zweier Kreise a und b, welche sich nicht schneiden, zu finden.

Andeutung. Ziehe einen dritten Kreis c, der sowohl a als b schneidet. Die Potenzlinien von a, c und von b, c sind als gemeinsame Sehnen zu ziehen und schneiden sich in dem Potenzpunkte von a, b, c, welcher auf der gesuchten Potenzlinie gelegen ist.

10) Die Halbirungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise liegen auf einer Geraden, nämlich der Potenzlinie dieser Kreise.

11) Zieht man eine Gerade, welche in Bezug auf den Mittelpunkt des Centralabstandes zweier Kreise symmetrisch gegen die Potenzlinie derselben gelegen ist, so ist diese Gerade der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche die gegebenen Kreise halbiren, d. h. in den Endpunkten eines Durchmessers schneiden.

(Man kann diese Gerade dadurch finden, dass man die Radien der gegebenen Kreise verwechselt und nun die Potenzlinie der dadurch entstandenen Kreise zeichnet.)

12) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneiden und einen andern halbiren, ist eine zu der Centralen beider Kreise senkrechte Gerade.

13) Den geometrischen Ort für die Mittelpunkte derjenigen Kreise zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und

α) einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneiden (Ueb. 3, β),

β) einen gegebenen Kreis halbiren (setze in Ueb. 11 den Radius des einen Kreises gleich Null).

14) Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und

α) einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet,

β) einen gegebenen Kreis halbirt.

15) Einen Punkt zu suchen, so dass die von ihm an drei gegebene Kreise gezogenen Tangenten gleich sind.

16) Einen Kreis zu zeichnen, welcher α) drei gegebene Kreise senkrecht schneidet, β) drei Kreise halbirt, γ) zwei derselben rechtwinklig schneidet und den dritten halbirt.

17) Der Schnittpunkt der Höhen eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der Potenzlinien der drei über den Seiten als Durchmessern construirten Kreise.

18) Wenn zwei Kreise, welche sich schneiden, von einem dritten berührt werden, so treffen sich Tangenten der Berührungspunkte auf der gemeinsamen Sehne der Schnittkreise.

19) Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei Schnittkreise berührt und zwar den einen in einem bestimmten Punkte.

20) α) Jeder Punkt M auf der Potenzlinie eines Büschels von Kreisen k ist nach Ueb. 7 Mittelpunkt eines Kreises c, welcher die Kreise k rechtwinklig schneidet. Der Radius dieses Kreises c ist die gemeinsame Länge der Tangenten, welche von M an die Kreise k des Büschels gezogen sind.

β) Umgekehrt schneidet auch jeder Kreis k des Büschels alle Kreise c rechtwinklig. Die Tangenten, welche von dem Mittelpunkte des Kreises k an die Kreise c gezogen sind, sind dem Radius des Kreises k gleich.

γ) Die Kreise c bilden einen Büschel, von welchem die Centrale der Kreise k Potenzlinie ist.

δ) Wenn die Kreise k durch zwei feste Punkte gehen, so stellen dieselben Punkte zwei der Kreise c vor, welche zu Punkten zusammengeschrumpft sind. Der Büschel der Kreise c bildet alsdann auf seiner Centralen eine involutorische Reihe mit Doppelpunkten und die Kreise dieses Büschels schneiden sich nicht.

ε) Wenn die Kreise k sich nicht schneiden, so gehen die Kreise c durch zwei feste Punkte auf der Centralen der Kreise k. Diese Punkte sind die Doppelpunkte der durch die Kreise k auf ihrer Centralen gebildeten involutorischen Reihe.

Uebungen zu Abschnitt III (Pol und Polare). § 3.

1) Alle Kreise, in Bezug auf welche die Gerade p Polare des Punktes P ist, bilden einen Büschel.

Andeutung. Die Mittelpunkte der Kreise liegen auf der Geraden PM (Fig. 11 auf Seite 13 des Anhanges), welche von P senkrecht auf p gefällt ist. Jeder der gesuchten Kreise muss

also PM schneiden. Es entsteht eine involutorische Reihe mit den Doppelpunkten M und P. Die Punkte P und M stellen selbst zwei in Punkte zusammengeschrumpfte Kreise des Büschels vor.

2) Ein Kreis k und eine Gerade a bestimmen einen Büschel von Kreisen. Wenn a den Kreis k nicht trifft, so schneidet kein Kreis des Büschels den andern. Die auf der Centrallinie des Büschels entstehende involutorische Reihe hat alsdann Doppelpunkte. Man gebe Punkte an, welche in Bezug auf alle Kreise des Büschels dieselbe Gerade als Polare haben.

3) Einen Kreis so zu zeichnen, dass die Gerade p Polare des Punktes P ist und dass dieser Kreis

α) seinen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden hat,

β) durch einen gegebenen Punkt geht,

γ) einen gegebenen Radius hat,

δ) eine gegebene Gerade berührt.

Andeutungen. α) Der Mittelpunkt bestimmt sich als Schnitt zweier Geraden. Weiterhin handelt es sich um die Construction einer mittleren Proportionalen. β) Es handelt sich zuerst um die Construction eines vierten harmonischen Punktes. Alsdann kennt man 2 Punkte des Kreises und weiss, dass der Mittelpunkt auf einer gewissen Geraden liegt. γ) Der gesuchte Kreis schneidet die Gerade PM in Fig. 11 auf Seite 13 des Anhanges in 2 Punkten A und B. Um ihren Abstand von der Mitte der Strecke PM zu finden, benütze man die Aufgabe: Zwei Strecken zu finden, wenn ihre Differenz und die mittlere Proportionale bekannt sind. (Siehe die Uebungen G. I, § 9, Ueb. 17 β.) δ) Es handelt sich zuerst um die Construction eines vierten harmonischen Strahles. Alsdann kennt man 2 Tangenten des Kreises und weiss, dass sein Mittelpunkt auf einer gewissen Geraden liegt.

4) Einen Kreis so zu zeichnen, dass die Gerade p Polare des Punktes P ist und dass die Polare eines andern Punktes g mit einer gegebenen Geraden parallel ist.

Andeutung. Man findet den Mittelpunkt als Schnittpunkt zweier Geraden.

5) Ein Punkt P innerhalb und eine Gerade g ausserhalb eines Kreises ist gegeben. Man soll

α) einen Punkt auf g suchen, so dass die Polare desselben durch P geht,

β) eine Gerade durch P so ziehen, dass ihr Pol auf g liegt.

6) Welches ist der geometrische Ort derjenigen Punkte, in welchen die Verbindungslinien der Punkte einer gegebenen Geraden mit dem Mittelpunkte von den Polaren dieser Punkte getroffen werden?

7) Der Pol jedes Durchmessers ist ein unendlich ferner Punkt.

8) Die Polare eines unendlich fernen Punktes ist ein Durchmesser.

9) Die Gesammtheit aller unendlich fernen Punkte der Ebene ist der geometrische Ort derjenigen Punkte, welche dem Mittelpunkte conjugirt sind. (Die Polare des Mittelpunktes ist die unendlich ferne Gerade.)

10) Wenn man auf jedem von zwei Durchmessern ein Paar conjugirter Punkte bestimmt, so liegen diese Punkte auf einem Kreise.

11) Ein Kreis k, welcher einen Durchmesser eines gegebenen Kreises k' in conjugirten Punkten schneidet, trifft auch jeden andern Durchmesser von k' in conjugirten Punkten.

12) Der Kreis k in 11) schneidet den gegebenen Kreis k' rechtwinklig.

13) Wenn zwei Kreise einander rechtwinklig schneiden, so wird jede Secante der Kreise, welche durch den Mittelpunkt von einem der beiden Kreise geht, von diesen Kreisen in vier harmonischen Punkten geschnitten.

14) Schneiden sich zwei Kreise rechtwinklig, so ist die gemeinsame Sehne derselben die Polare eines jeden der Mittelpunkte in Bezug auf den andern Kreis.

15) Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch einen Punkt geht und zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet.

Andeutung. Wende 12) zweimal an.

16) Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht, eine gegebene Gerade berührt und einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet.

Uebungen zu Abschnitt IV (Kreisberührungen). § 4.

1) C und C' seien die Mittelpunkte zweier Kreise mit den Radien r und r'. Man soll die Theile x und y bestimmen, in welche der Abstand d durch den innern Aehnlichkeitspunkt getheilt wird.

Andeutung. x und y verhalten sich wie $r : r'$, so dass man setzen kann: $x = m \,.\, r$, $y = m \,.\, r'$. Aus $x + y = d$ bestimmt sich sodann m und man erhält

$$x = r \cdot \frac{d}{r + r'}, \quad y = r' \cdot \frac{d}{r + r'}.$$

2) Man lasse den einen Kreis zum Punkte C zusammenschrumpfen, indem man den Radius unendlich klein werden lässt. Alsdann wird auch x unendlich klein. Der innere und in Folge dessen, wie leicht zu sehen, auch der äussere Aehnlichkeitspunkt fällt mit dem Punkte C zusammen.

3) Man lasse den Mittelpunkt C' auf der Centralen beider Kreise in unendliche Ferne rücken, indem man gleichzeitig r' und d um dieselbe Grösse z zunehmen lässt und z einen unendlich grossen Werth beilegt. Dann geht der Werth von x in r über. Um hieraus zu schliessen, dass beide Aehnlichkeitspunkte auf dem Kreise um C liegen und die Endpunkte des in die Centrale fallenden Durchmessers sind, ist noch zu bedenken, dass die beiden Aehnlichkeitspunkte mit C und C' vier harmonische Punkte bilden. Da C' unendlich fern ist, so halbirt C den Abstand der beiden Aehnlichkeitspunkte.

4) Hieraus schliesst man: Wenn eine Gerade a als Kreis mit unendlich grossem Halbmesser gesehen wird, so kann man von den Aehnlichkeitspunkten dieser Geraden und eines Kreises b sprechen. Dieselben sind die Endpunkte desjenigen Durchmessers in b, welcher auf der Geraden b senkrecht steht. Man übersieht auch, dass jeder dieser Punkte als äusserer oder innerer Aehnlichkeitspunkt aufgefasst werden kann, je nachdem man den Mittelpunkt des unendlich grossen Kreises rechts oder links in unendlicher Ferne annimmt.

5) Einen Kreis zu zeichnen, welcher die gegebenen Kreise a und b berührt und zwar den ersten in dem gegebenen Punkte A.

Andeutung. Es gibt 2 solche Kreise. Derjenige, welcher a und b gleichartig berührt, trifft b in dem Punkte B, welcher zu A für den äussern Aehnlichkeitspunkt invers ist (§ 14 b).

6) Wenn man von einem Punkte der Potenzlinie zweier Kreise Tangenten an die letzteren zieht, so sind die Berührungspunkte für den innern oder äussern Aehnlichkeitspunkt invers.

Andeutung. Vergleiche § 13 b, 2 und § 14 b.

7) Wenn man in den Schnittpunkten zweier Kreise mit einem äussern Aehnlichkeitsstrahl derselben Tangenten an die Kreise zieht, so bilden sie ein Parallelogramm. Zwei Ecken desselben liegen auf der Potenzlinie und die übrigen auf den Polaren des äusseren Aehnlichkeitspunktes in Bezug auf jeden der Kreise.

8) Wenn zwei Kreise a und b von einem dritten k rechtwinklig geschnitten werden, so sind die Schnittpunkte paarweise invers.

Andeutung. Die Schnittpunkte sind Berührungspunkte von Tangenten, welche aus dem Mittelpunkte von k gezogen sind. Wende § 2, Ueb. 7 und § 14 b an.

9) Wenn zwei Kreise a und b von einem dritten k rechtwinklig geschnitten werden, so sind die Schnittpunkte Ecken eines vollständigen Vierecks, in welchem zwei Nebenecken mit den Aehnlichkeitspunkten von a und b zusammenfallen, während das dritte Nebeneck auf der Potenzlinie dieser Kreise gelegen ist.

Andeutung. Verwende Fig. 9, wo die Kreise a und b von dem Kreise k rechtwinklig geschnitten werden. Die Punkte P_1 und P_2 sind nach Ueb. 8 inverse Punkte von a und b. Dass P_1P_2 durch den innern Aehnlichkeitspunkt von a und b geht, erkennt man daraus, dass der Kreis, welcher a in P_1 und b in P_2 berührt, eine ungleichartige Berührung vollzieht. Ebenso erkennt man, dass P_4P_5 durch denselben innern Aehnlichkeitspunkt von a und b geht. Nach Ueb. 8 sind auch P_1 und P_5 inverse Punkte der Kreise a und b. Der Kreis, welcher a in P_1 und b in P_5 berührt, wird eine gleichartige Berührung beider Kreise vollziehen. P_1P_5 geht also durch den äussern Aehnlichkeitspunkt von a und b. Das Gleiche thut die Gerade P_2P_4. Was die Geraden P_1P_4 und P_2P_5 betrifft, so sind beide sowohl für den innern als auch für den äussern Aehnlichkeitspunkt invers und müssen sich auf der Potenzlinie von a und b schneiden.

10) Wenn die Ecken $P_1, P_2, P_3, \ldots P_6$ eines Sechsecks auf einem Kreise liegen, so liegen die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden. (Satz von Pascal.)

Andeutung. Lege durch die gegenüberliegenden Ecken P_1 und P_4 (Fig. 9) einen Kreis a, durch P_2 und P_5 einen Kreis b und durch P_3 und P_6 einen Kreis c, so dass der gegebene Kreis von a, b, c rechtwinklig geschnitten wird. Der Schnittpunkt Q von P_1P_2 und P_4P_5 ist dann ein Aehnlichkeitspunkt von a und b. Der Schnittpunkt R von P_2P_3 und P_5P_6 ist ein Aehnlichkeitspunkt von b und c, und endlich ist der Schnittpunkt S von P_3P_4 und P_6P_1 ein Aehnlichkeitspunkt von c und a (Ueb. 8). Es ist nur noch zu zeigen, dass diese drei Aehnlichkeitspunkte solche sind, welche nach § 14 a auf einer Geraden (Aehnlichkeitsaxe der drei Kreise a, b, c) liegen. Der allgemeine Beweis hiervon ist durch Uebung 11) vermittelt. Hier wollen wir nur sehen ,wie sich die Behauptung für die specielle Figur 9 nachweisen lässt. Dass Q der innere Aehnlichkeitspunkt von a und b ist, wurde schon in Ueb. 9 gezeigt; gerade so findet man aber, dass R der innere Aehnlichkeitspunkt von b und c, S dagegen der äussere Aehnlichkeitspunkt von c und a ist. Q, R, S liegen also nach § 14 a auf einer Geraden.

11) Es sei vorausgesetzt, dass die Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots P_6$ in dieser Reihe aufeinander folgen, wenn man in einer bestimmten Drehungsrichtung um den Kreis k herumgeht. Man

soll beweisen, dass die Punkte Q, R, S, welche nach den letzten Uebungen Aehnlichkeitspunkte von je zweien unter den Kreisen a, b, c sind, immer auf einer Geraden (Aehnlichkeitsaxe) liegen.

Andeutung. Man denke sich die Bogen p_1p_4, p_2p_5, p_3p_6 in der Drehungsrichtung $p_1p_2p_3\ldots$ gemessen. Wenn die Bogen p_1p_4 und p_2p_5 gleichzeitig kleiner oder gleichzeitig grösser als 180 Grad sind, so ist Q der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise a und b. Ist aber einer dieser Bogen kleiner und der andere grösser als 180^0, so ist Q der äussere Aehnlichkeitspunkt von a und b. Nachdem man sich hiervon überzeugt hat, denke man sich die Bogen, welche grösser als 180^0 sind, durch $+$, diejenigen, welche kleiner als 180^0 sind, durch $-$ bezeichnet. Eine Zeichenfolge wird nach dem eben Gesagten auf einen innern, ein Zeichenwechsel auf einen äussern Aehnlichkeitspunkt führen. Wir betrachten zuerst den Fall, wo den Bogen P_1P_4, P_2P_5, P_3P_6 allen das gleiche Zeichen (beispielsweise das negative Zeichen wie in Fig. 9) zukommt.

Die Linienpaare, welche zum Schnitt kommen, sind:

$$P_1P_2 \text{ und } P_4P_5,\ P_2P_3 \text{ und } P_5P_6,\ P_3P_4 \text{ und } P_6P_1.$$

Die zu vergleichenden Paare von Bogen sind:

1) $\ldots P_1P_4$ und P_2P_5, P_2P_5 und P_3P_6, P_3P_6 und P_4P_1.

Die Zusammenstellungen von Vorzeichen, welche diesen Bogen entsprechen, sind:

$$- \text{ und } -,\quad - \text{ und } -,\quad - \text{ und } +\,.$$

(Man bedenke hierbei, dass den Bogen P_1P_4 und P_4P_1 entgegengesetztes Vorzeichen zukommt.) Hieraus sieht man, dass zwei innere und ein äusserer Aehnlichkeitspunkt vorhanden sind, welche auf einer Aehnlichkeitsaxe liegen. Betrachten wir noch zweitens den Fall, wo die Vorzeichen der Bogen P_1P_4, P_2P_5, P_3P_6 abwechseln, beispielsweise $-$, $+$, $-$ seien. Alsdann entsprechen den Bogenpaaren in 1) folgende Zeichenpaare:

$$- \text{ und } +,\quad + \text{ und } -,\quad - \text{ und } +\,.$$

Man kommt also hier auf die drei äussern Aehnlichkeitspunkte, welche auch auf einer Aehnlichkeitsaxe liegen.

12) Wenn die Seiten eines Sechsecks P_1, P_2, $P_3\ldots P_6$ (Fig. 10) einen Kreis berühren, so gehen die Verbindungslinien gegenüberliegender Eckpunkte durch einen Punkt (Satz von Brianchon).

Andeutung. Die Berührungssehnen $p_1, p_2, \ldots p_6$ der Eckpunkte sind die Seiten eines Sechsecks, dessen Ecken auf dem Kreise liegen. p_1 ist die Polare von P_1 und p_4 ist die Polare von P_4 (§ 10 b). Die Gerade P_1P_4 hat also den Schnittpunkt Q der Geraden p_1 und p_4 zum Pole (§ 11 γ). Ebenso ist P_2P_5

Polare des Schnittpunktes R von p_2 und p_5 und P_3P_6 ist Polare des Schnittpunktes S von p_3 und p_6. Da nun nach Uebung 10) Q, R, S auf einer Geraden liegen, so schneiden sich p_1p_4, p_2p_5, p_3p_6 in dem Pole dieser Geraden (§ 11 γ).

13 α) Der Kreis c (Fig .11) wird von den Kreisen a und b von aussen berührt. Man soll einen Kreis d zeichnen, der die drei gegebenen Kreise berührt.

Andeutung. Es ist leicht zu sehen, dass der Kreis d beide Kreise a und b im Allgemeinen nicht ungleichartig berühren kann, ohne von dem Kreise c geschnitten zu werden. Wir haben es also mit zwei Kreisen c und d zu thun, durch welche die Kreise a und b gleichartig berührt werden. Alsdann muss die Potenzlinie oder die gesuchte gemeinsame Tangente von c und d durch den äussern Aehnlichkeitspunkt S von a und b gehen. (Siehe § 14 b.) Man erhält die zwei Lösungen durch die beiden Tangenten SP und SQ, welche von S an c gezogen werden können. Zu bemerken ist, dass man die Berührungspunkte P und Q am leichtesten findet, wenn man über SM als Durchmesser einen Kreis zeichnet.

13 β) Ein Kreis c wird von zwei Kreisen a und b von innen berührt. Man soll einen Kreis d zeichnen, welcher a, b, c berührt.

Andeutung. Man erhält auf dieselbe Weise wie bei 13 α zwei Lösungen.

14) Der Kreis c (Fig. 12) wird durch die Gerade a und den Kreis b von aussen berührt. Man soll einen Kreis d zeichnen, welcher a, b, c berührt.

Andeutung. 1) Man kann die Aufgabe auf 13) zurückführen, wenn man a als Kreis mit unendlich grossem Halbmesser ansieht. Um den Aehnlichkeitspunkt S von a und b zu finden, aus dem die Tangenten SP und SQ (siehe 13) zu ziehen sind, hat man hier zu bedenken, dass S auf dem Kreise b selbst liegt. S wird demnach durch die Gerade AB gefunden, welche zwei äussere Aehnlichkeitspunkte verbindet und nach § 14 a auch durch den dritten gehen muss.

15) Ueber der Höhe CD (Fig. 13) eines durch die Gerade a und den Kreis b gebildeten Kreisabschnittes ist ein Kreis c beschrieben; man soll zu beiden Seiten des letztern noch zwei Kreise einzeichnen, welche die Kreise b und c, sowie die Gerade a berühren.

Andeutung. Man kann die Gerade a als einen Kreis von unendlich grossem Radius ansehen, so dass der Kreis c die beiden Kreise a und b von innen berührt. Dann hat man einen besondern Fall von 13 β vor sich. C und D erscheinen als äussere Aehnlichkeitspunkte. Die Gerade CD bestimmt auf b den Punkt

S als äussern Aehnlichkeitspunkt von a und b. Durch S müssen, wie in 13), die Tangenten an den Kreis c gezogen werden, um die Berührungspunkte P und Q mit den gesuchten Kreisen zu finden.

16) Aus einem Punkte der Geraden g (Fig. 14) einen Kreis zu zeichnen, welcher die Kreise a und b gleichartig berührt.

Andeutung. Analysis: Der gesuchte Kreis c und der Kreis a bestimmen zwei ähnliche Systeme mit dem (gesuchten) Berührungspunkte S als Aehnlichkeitspunkt. In diesen Systemen entsprechen sich:

1) Die Gerade g und die durch das Centrum A zu g gezogene Parallele f.
2) Die Potenzlinie p von a und b und die Polare q des äussern Aehnlichkeitspunktes von a und b für den Kreis a (§ 14 d).

Daraus folgt, dass der Schnittpunkt P von g und p dem Schnittpunkte Q von f und q entspricht. PQ ist also ein Aehnlichkeitsstrahl und trifft den Kreis b in dem gesuchten Berührungspunkt (Aehnlichkeitspunkt). Man erhält im Allgemeinen zwei Lösungen, weil PQ in zwei Punkten S und T schneidet.

17) Einen Kreis c zu zeichnen, der zwei Kreise k und k' und ausserdem eine Gerade a berührt, wenn die Berührung α) gleichartig und β) ungleichartig sein soll.

Andeutung zu α). Analysis. Die Kreise k und c bestimmen zwei ähnliche Systeme mit dem gesuchten Berührungspunkte S (Fig. 15) als Aehnlichkeitspunkt. In diesen Systemen entsprechen sich 1) die Polare q des äussern Aehnlichkeitspunktes von k und k' in Bezug auf k und die Potenzlinie p von k und k' (§ 14 d), 2) die Gerade a und eine zu a parallele Tangente b des Kreises k. Dadurch entspricht in diesen ähnlichen Systemen der Schnittpunkt H von a und p dem Schnittpunkte G von b und q. Die Gerade HG muss als Aehnlichkeitsstrahl durch den gesuchten Berührungspunkt S gehen. Die Construction spreche man hiernach selbst aus. Weil HG den Kreis im Allgemeinen in zwei Punkten trifft, so erhält man zwei Lösungen. Die zweite Tangente des Kreises k, welche parallel zu a gelegt werden kann, liefert abermals zwei Lösungen. Somit hat man vier Lösungen für die gleichartige Berührung und eben so viele für die ungleichartige Berührung (Aufgabe β), für welche man die Polare des innern Aehnlichkeitspunktes von k und k' verwendet.

18) Einen Kreis c zu zeichnen, welcher durch den Punkt k (Fig. 16) geht und den Kreis k' sowie die Gerade a berührt.

Andeutung. Die Auflösung stimmt mit derjenigen von 17) überein, wenn man k als Kreis von verschwindend kleinem Radius betrachtet. Die Gerade q in 17) ist hier nichts als die Polare

des Punktes k für den Kreis k'. Die Gerade p in 17) ist hier diejenige Gerade, welche die vom Punkte k bis zum Kreise k' reichenden Tangentenabschnitte halbirt.

19) Einen Kreis c zu zeichnen, welcher drei gegebene Kreise k, k', k'' berührt. Dabei werden folgende 4 Fälle unterschieden:

α) k und k' sollen gleichartig berührt werden;
k und k'' sollen ebenfalls gleichartig berührt werden;
dann werden auch k' und k'' gleichartig berührt.

β) k und k' sollen gleichartig berührt werden;
k und k'' sollen ungleichartig berührt werden;
dann werden auch k' und k'' ungleichartig berührt.

γ) k und k' sollen ungleichartig berührt werden;
k und k'' sollen gleichartig berührt werden;
dann werden k' und k'' ungleichartig berührt.

δ) k und k' sollen ungleichartig berührt werden;
k und k'' sollen ungleichartig berührt werden;
dann werden k' und k'' gleichartig berührt.

Andeutung zu α). Analysis. Der Kreis k und der gesuchte Kreis c bestimmen zwei ähnliche Systeme mit dem Berührungspunkt S (Fig. 17) als Aehnlichkeitspunkt. In diesen ähnlichen Systemen entsprechen sich:

1) Die Polare q' des äusseren Aehnlichkeitspunktes von k und k' für den Kreis k und die Potenzlinie p' von k und k' (nach § 14 d, weil k und k' von c gleichartig berührt wird).
2) Die Polare q'' des äusseren Aehnlichkeitspunktes von k und k'' für den Kreis k und die Potenzlinie p'' von k und k''.

Daraus folgt, dass in diesen Systemen dem Schnittpunkte P von p' und p'' der Schnittpunkt Q von q' und q'' entspricht. QP ist also ein Aehnlichkeitsstrahl und geht durch den gesuchten Aehnlichkeitspunkt oder Berührungspunkt S. Die Construction kann man hiernach selbst aussprechen. Man erhält (im Allgemeinen) zwei Kreise, weil PQ den Kreis k in zwei Punkten trifft, welche beide als Berührungspunkte angenommen werden können. Der Analysis zu Folge werden hier die äussern Aehnlichkeitspunkte von k, k' und von k, k'' verwendet. Man kommt auf die gleichen Lösungen, wenn man die äussern Aehnlichkeitspunkte von $k'k''$ und $k'k$ oder wenn man die äussern Aehnlichkeitspunkte von $k''k'$ und $k''k$ verwendet. Diese drei äussern Aehnlichkeitspunkte liegen auf einer Aehnlichkeitsaxe. In derselben Weise kommen bei den Fällen β), γ), δ) Aehnlichkeitspunkte vor, welche bezüglich auf einer der drei übrigen Aehnlichkeitsaxen liegen. Es folgt nun noch die Andeutung zum Beweise der zu α) gehörigen Construction: Der Kreis c sei so construirt, dass er mit

dem Kreise k den Punkt S zum Aehnlichkeitspunkte hat und zugleich in den ähnlichen Systemen beider Kreise die Geraden p' und q' sich entsprechen (Uebungen zu G. I, § 8, Ueb. 30 β). Der Kreis c muss alsdann den Kreis k im Punkte S berühren (Uebungen zu G. I, § 8, Ueb. 27) und muss auch nach § 14 e den Kreis k' so berühren, dass die Berührung von k und k' eine gleichartige ist. Nun entsprechen sich auch die Punkte P und Q als Schnitte dieser Geraden mit einem Aehnlichkeitsstrahl. Ferner entsprechen sich die Geraden p'' und q'', weil sie durch entsprechende Punkte gehen und parallel sind. Weiter folgt aber aus § 14 e, dass c den Kreis k'' auch berührt und zwar so, dass k und k'' gleichartig berührt werden.

20) Einen Kreis zu zeichnen, welcher die Kreise k und k'' (Fig. 18) gleichartig berührt und durch den Punkt k' geht.

Andeutung. Die Auflösung geht aus 19) hervor, wenn man dem Kreise k' einen verschwindend kleinen Radius zuschreibt. p'' und q'' haben vollkommen dieselbe Bedeutung wie in 19). q' stellt hier die Polare des Punktes k' für den Kreis k vor. p' ist diejenige Gerade, welche die vom Punkte k' an den Kreis k reichenden Tangentenabschnitte halbirt.

21) Einen Kreis c zu zeichnen, welcher durch die Punkte k und k' geht und den Kreis k'' berührt.

Andeutung. Die Geraden q' und p' haben in Fig. 19 dieselbe Bedeutung wie in Uebung 20). Ausserdem stellt b einen Durchmesser des Kreises k vor, welcher mit der Mittelsenkrechten der Strecke $k'k''$ parallel ist. a und b entsprechen sich in den ähnlichen Systemen der Kreise c und k. Dem Schnittpunkt P von p' und a entspricht in diesen Systemen der Schnittpunkt Q von q' und b. PQ muss also durch den gesuchten Berührungspunkt von k und c gehen (2 Lösungen).

22) Beispiel der Behandlung unzugänglicher Punkte. Es sind drei Kreise k, k', k'' gegeben, welche ihre Mittelpunkte auf der Geraden a (Fig. 20) haben. Man soll einen Kreis c zeichnen, welcher die drei Kreise berührt.

Andeutung. Die Construction in 19) führt hier nicht zum Ziele, weil die dort benützten Potenzlinien und Polaren hier nicht zum Schnitt kommen, sondern parallel sind. Man construire dennoch wie in 19) die Geraden p', q' und p'', q''. In den ähnlichen Systemen der Kreise k und c (c ist gesucht) entsprechen sich alsdann:

1) die Geraden q' und p',
2) die Geraden q'' und p'',
3) die Gerade a und eine durch den Mittelpunkt von c zu a gezogene Parallele b (b ist in der Figur nicht gezeichnet).

Folglich entsprechen sich in diesen Systemen die Strecke $Q'Q''$, welche auf a durch die Geraden q', q'' ausgeschnitten wird und die Strecke x, welche auf b durch die Geraden p' und p'' ausgeschnitten wird. Die Strecke x ist aber offenbar gleich $P'P''$ in der Figur. Wenn nun $Q'Q''$ und $P'P''$ entsprechende Strecken sind, so müssen die Radien der Kreise k und c sich wie $Q'Q'' : P'P''$ verhalten. Um den Radius von c zu finden, errichte man in dem Endpunkte Q' von $Q'Q''$ die Senkrechte $Q'V = P'P''$ und ziehe $Q''V$. Errichtet man ferner in dem Endpunkte O des Radius SO eine Senkrechte und schneidet sie in R mit der zu $Q''V$ gezogenen Parallelen SR, so ist CR der Radius des Kreises c. Der Mittelpunkt von c wird nun nach § 2, Ueb. 41 δ der Uebungen zu G. I gefunden.

Uebungen zu Abschnitt V (Ellipse, Hyperbel und Parabel). § 5.

1) Man soll zeigen, dass jede durch den Mittelpunkt M (Fig. 21) einer Ellipse gezogene Gerade die Ellipse in zwei Punkten schneiden muss.

Andeutung. Für den Punkt M ist $MF + MF'$ gleich der doppelten Excentricität der Ellipse, also kleiner als die grosse Axe. Wenn der Punkt M sich in der Richtung MN bewegt, so wächst $MF + MF'$ fortwährend (Uebungen zu G. I, § 2, Ueb. 20) und zwar über alle Grenzen. Dabei muss es einmal vorkommen, dass $MF + MF'$ der grossen Axe gleich wird, so dass auf der Richtung MN ein Punkt der Ellipse gelegen ist.

2) Man soll untersuchen, welche unter den durch den Mittelpunkt M (Fig. 22) einer Hyperbel gezogenen Geraden die Hyperbel treffen. Dabei verwende man folgenden Satz: Wenn ein Punkt vom Fusspunkte B (Fig. 23) der Senkrechten AB weg sich in der Richtung BC bewegt, so wächst die schiefe Entfernung dieses Punktes von A um so schneller, je weiter der Punkt von B entfernt ist (jedoch nicht proportional mit dieser Entfernung). Um dies einzusehen, seien CD und FG zwei an verschiedenen Stellen C und F angetragene Zunahmen des von dem bewegten Punkte durchlaufenen Weges. Man nehme $CD = FG$. Die zu CD gehörige Zunahme der schiefen Strecke AC findet man durch einen um A mit dem Radius AC beschriebenen Kreisbogen CE. Diese Zunahme ist ED. Analog wird sich die zu FG gehörige Zunahme der schiefen Strecke AF ergeben; sie ist HG gleich. Wir setzen nun die Strecken CD und FG so klein voraus, dass die Kreisbogen CE und FH als gerade Strecken angesehen werden können. Alsdann haben wir zwei rechtwinklige Dreiecke

CED und FHG mit gleicher Hypotenuse zu vergleichen. Da Winkel $EDC > HGF$ (G. I, § 13 b), so ist die Kathete ED kleiner als die Kathete HG (Uebungen zu G. I, § 2, Ueb. 19), woraus die Behauptung folgt.

Andeutung. Man denke sich einen Punkt von M (Fig. 22) aus in Bewegung nach der Richtung MN. Die Normalen FP und $F'Q$ sind gleich. Für den bewegten Punkt wächst der Abstand NF schneller als NF', weil N von P weiter entfernt ist als von Q. Wenn nun in der Differenz $MF - MF'$ der Minuend schneller wächst als der Subtrahend, so nimmt diese Differenz immer zu. Hieraus darf man aber noch nicht schliessen, dass diese Differenz über alle Grenzen wächst und einmal der Hauptaxe der Hyperbel gleich werden müsse. Lässt man nämlich N bis in unendliche Ferne rücken, wobei NF und NF' sich den Lagen FK und $F'H$ der zu MN gezogenen Parallelen unbegrenzt nähern, so wird der Kreisbogen $F'B$ nach und nach zu der geradlinigen Strecke $F'C$, welche auf FK senkrecht steht. Die Differenz $NF - NF'$ hat alsdann als Maximum die Grösse FC erreicht und die Gerade hat mit der Hyperbel 1) einen in endlicher Entfernung gelegenen Punkt oder 2) den unendlich fernen Punkt auf MN oder 3) gar keinen Punkt mit der Hyperbel gemein, je nachdem dieses Maximum FC grösser, gleich oder kleiner als die Hauptaxe der Hyperbel ist. Man zeichne nun über der doppelten Excentricität FF' (Fig. 24) ein bei D rechtwinkliges Dreieck, welches die Kathete FD der Hauptaxe gleich hat. Dann ist die zu DF' gezogene Parallele MG eine Asymptote der Hyperbel, weil sie nach dem Vorhergehenden mit der Hyperbel nur den unendlich fernen Punkt gemeinsam hat. Verändert sich das rechtwinklige Dreieck FDF' so, dass der Winkel bei F abnimmt und daher die Kathete FD grösser als $2a$ wird (Uebungen zu G. I, § 2, Ueb. 19), so muss die zu FD gezogene Parallele MG die Hyperbel schneiden (in 2 zu M symmetrischen Punkten). Wächst dagegen jener Winkel, so wird FD kleiner als $2a$ und MG trifft die Hyperbel gar nicht. Wir haben also das Resultat: Alle Strahlen des Büschels M, welche mit FF' kleinere (spitze) Winkel machen als die Asymptoten, schneiden die Hyperbel; alle Strahlen, welche mit FF' grössere (spitze) Winkel machen als die Asymptoten, treffen die Hyperbel gar nicht. Für die Asymptoten fallen die beiden Schnittpunkte in den einen unendlich fernen Punkt derselben (G. I, § 9 d), sie sind also den Tangenten zuzurechnen.

3) Zu zeigen, dass jede zur Axe der Parabel parallele Gerade l die Parabel in einem einzigen Punkte trifft.

Anmerkung. Wenn man die Parabel als geometrischen

Ort derjenigen Punkte auffasst, für welche das Verhältniss der Abstände von Leitlinie und Brennpunkt gleich 1 sei, so ergibt sich, dass auch der unendlich ferne Punkt der Geraden l als Parabelpunkt angesehen werden kann.

4) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise c, welche einen Kreis k mit dem Mittelpunkte F und dem Radius r berühren und durch einen innerhalb k gelegenen Punkt F' gehen, ist eine Ellipse, welche F und F' zu Brennpunkten und r zur grossen Axe hat.

Andeutung. ϱ sei der Radius und M der Mittelpunkt eines der Kreise c. Dann hat man $MF = r - \varrho$ und $MF' = \varrho$. Demnach ist $MF + MF' = r$, worin der Beweis gelegen ist.

5) Die Mittelsenkrechten der Strecken, welche den Punkt F' in 4) mit den Punkten des Kreises k verbinden, sind die Tangenten der Ellipse in 4).

6) Eine gegebene Ellipse als geometrischen Ort nach 4) darzustellen.

7) Auf welche Kreisaufgabe wird man geführt, wenn für die Ellipse in 4) der Schnittpunkt mit einer durch F gezogenen Geraden gesucht werden soll (siehe die Uebungen zu G. I, § 2, Ueb. 43 α).

8) Die Schnittpunkte einer Geraden g mit der Ellipse in 4) zu suchen.

Andeutung. Man hat nach denjenigen Kreisen zu suchen, welche durch F' gehen, k berühren und ihren Mittelpunkt auf g haben. Diese Kreise müssen auch durch den Punkt C gehen, welcher für g als Axe zu F' symmetrisch ist. Solcher Kreise (welche durch F' und C gehen und k berühren), gibt es zwei, wenn C innerhalb k gelegen ist (siehe § 2, Ueb. 8), und man hat in diesem Falle zwei Schnittpunkte von g und der Ellipse. Kommt aber C auf k zu liegen, so fallen jene Kreise zusammen und man hat eine Gerade vor sich, welche die Ellipse in zwei zusammenfallenden Punkten trifft (Tangente). Liegt aber C ausserhalb k, so existirt gar kein Kreis dieser Art und die Ellipse wird von g nicht getroffen. Man sieht daraus, dass die in § 17 a des Anhanges genannten Geraden die einzigen Tangenten der Ellipse sind.

9) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise c, welche einen Kreis k mit dem Mittelpunkte F und dem Radius r berühren und durch einen ausserhalb k gelegenen Punkt F' gehen, ist eine Hyperbel, welche F und F' zu Brennpunkten und r zur Hauptaxe hat.

Andeutung. ϱ sei der Radius und M der Mittelpunkt eines der Kreise c. Dann hat man: $MF = r + \varrho$ und $MF' = \varrho$.

Demnach ist $MF - MF' = r$, worin der Beweis liegt. Man erhält den einen Ast der Hyperbel durch die Kreise, welche ausschliessend berühren und den andern Ast durch die Kreise, welche einschliessend berühren. Die von F' an k gezogenen Tangenten können als Kreise von unendlich grossen Radien gedacht werden. Sie liefern zwei unendlich ferne Punkte der Hyperbel und trennen die Schaar der Kreise, welche ausschliessend berühren, von denjenigen, welche einschliessend berühren. In der That hat man auch die beiden Aeste der Hyperbel als in den unendlich fernen Punkten zusammenhängend anzusehen.

10) Die Mittelsenkrechten der Strecken, welche den Punkt F' in 9) mit den Punkten des Kreises k verbinden, sind die Tangenten der Hyperbel in 9).

11) Auf welche Kreisaufgabe wird man geführt, wenn für die Hyperbel in 9) der Schnittpunkt mit einer durch F gezogenen Geraden gesucht werden soll (siehe die Uebungen zu G. I, § 2, Ueb. 43 α).

12) Eine gegebene Hyperbel als geometrischen Ort nach 9) darzustellen.

13) Die Schnittpunkte einer Geraden g mit der Hyperbel in 9) zu suchen.

Andeutung. Die Lösung geschieht ganz wie bei Ueb. 8). Man erhält zwei getrennte Punkte, zwei zusammenfallende Punkte oder keine solche, je nachdem der für die Axe g zu F' symmetrische Punkt ausserhalb k, auf k oder im Innern von k gelegen ist. Im mittleren Falle ist g eine Tangente der Hyperbel. Man sieht, dass die in § 20 a des Anhanges aufgeführten Geraden die einzigen Tangenten der Hyperbel sind.

14) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise c, welche eine Gerade l berühren und durch einen Punkt F gehen, ist eine Parabel, welche l zur Leitlinie und F zum Brennpunkte hat.

Andeutung. M sei der Mittelpunkt und ϱ der Radius eines solchen Kreises. Die Entfernungen des Punktes M von l und F sind beide gleich ϱ.

15) Auf welche Kreisaufgabe wird man geführt, wenn für die Parabel in 14) der Schnittpunkt mit einer Normalen zur Leitlinie gesucht werden soll (siehe die Uebungen zu G. I, § 2, Ueb. 38).

16) Die Schnittpunkte einer Geraden g mit der Parabel in 14) zu suchen.

Andeutung. Man hat nach denjenigen Kreisen c zu fragen, welche l berühren, durch F gehen und den Mittelpunkt auf g haben. Diese Kreise gehen auch durch den Punkt C, welcher

für die Axe g zu F symmetrisch ist. Solcher Kreise (welche durch F und C gehen und l berühren) gibt es nach den Uebungen zu G. I, § 9, Ueb. 29 zwei, wenn C mit F auf derselben Seite von l gelegen ist und man hat in diesem Falle zwei Schnittpunkte von g mit der Parabel. Kommt aber C auf l zu liegen, so fallen jene beiden Kreise zusammen und man hat eine Gerade g vor sich, welche die Parabel in zwei zusammenfallenden Punkten trifft (Tangente). Liegen aber C und F auf verschiedenen Seiten von l, so erhält man gar keinen Kreis der Art und g trifft die Parabel nicht. Man sieht daraus, dass die in 23 a des Anhanges aufgeführten Geraden die einzigen Tangenten der Parabel sind.

17) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte M aller Kreise c, welche zwei gegebene Kreise k und k' gleichartig berühren, wenn

α) k von k' eingeschlossen wird, ... (Ellipse);
β) k und k' sich schneiden, ... (Hyperbel);
γ) k und k' sich ausschliessen. .... (Hyperbel).

Andeutung. α) Hier ist nur eine Berührung von innen möglich. c (Fig. 25) sei einer der berührenden Kreise mit dem Mittelpunkte M und dem Radius ϱ. Dann ist $MF' = r' - \varrho$ und $MF = \varrho - r$; daher $MF' + MF = r' - r$; $r' - r$ ist die grosse Axe der Ellipse.

β) r sei der Radius des grösseren Kreises k. Für diejenigen der berührenden Kreise, welche ausserhalb k und k' oder innerhalb k und k' liegen, hat man $MF - MF' = r - r'$. Für diejenigen Kreise aber, welche k und k' einschliessen, erhält man $MF' - MF = r - r'$. Man kommt so auf die beiden Zweige der Hyperbel. Die Gerade, welche die Berührungspunkte verbindet, geht durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt von k und k'. Die gemeinschaftlichen Tangenten von k und k', welche durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt gehen, stellen selbst die Grenzfälle der berührenden Kreise für den ins Unendliche wachsenden Radius ϱ vor. Sie bilden zugleich den Uebergang von dem einen Hyperbelast zum andern.

18) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte M aller Kreise c, welche zwei gegebene Kreise k und k' ungleichartig berühren, wenn

α) k von k' eingeschlossen wird, ... (Ellipse);
β) k und k' sich schneiden, ... (Ellipse);
γ) k und k' sich ausschliessen ... (Hyperbel).

19) Die Mittelsenkrechten der Berührungssehnen (AB in Fig. 25) in den Kreisen c, welche bei Uebung 17 und 18 betrachtet wurden, sind die Tangenten der von den Mittelpunkten

der Kreise c beschriebenen Ellipsen oder Hyperbeln. Die Träger dieser Berührungssehnen gehen alle durch einen Punkt.

Andeutung für Uebung 17 α). Die Mittelsenkrechte von AB (Fig. 25) geht durch M und halbirt den Winkel AMF; sie ist also die Ellipsentangente im Punkte M. Die Träger der Berührungssehnen AB gehen durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt der Kreise k und k'.

20) In den geometrischen Oertern 17) und 18) erscheinen die Asymptoten als Mittelsenkrechte derjenigen Strecken, welche auf den gemeinsamen Tangenten von k und k' liegen und von einem Berührungspunkte zum andern reichen. Werden k und k' von c gleichartig berührt, so kommen diejenigen gemeinsamen Tangenten in Betracht, welche durch den äussern Aehnlichkeitspunkt gehen. Mit Hülfe der in dieser Uebung gemachten Bemerkungen kann man augenblicklich übersehen, in welchen der sechs in den Uebungen 17) und 18) aufgezählten Fälle Hyperbeln zum Vorschein kommen.

21) Wenn in den Uebungen 17) und 18) einer der Kreise k und k' in einen Punkt zusammenschrumpft, so kommt man zu den geometrischen Oertern, welche in Uebung 4) und 9) betrachtet wurden. Die Berührungssehnen der Kreise c gehen alsdann in die Strecken über, welche den einen Brennpunkt mit Punkten des um den andern Brennpunkt gezogenen Kreises verbinden. Die Mittelsenkrechten dieser Strecken sind die Tangenten der Curve.

22) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte M aller Kreise c, welche einen Kreis k (Mittelpunkt F) und eine Gerade g berühren?

Andeutung. Dieser geometrische Ort besteht aus zwei Parabeln. F ist ihr gemeinsamer Brennpunkt (Fig. 26). Die Leitlinien laufen zu beiden Seiten im Abstande r (r ist der Radius von k) parallel mit der Geraden g. Wenn die Gerade den Kreis nicht trifft, wie in Fig. 26, so entsteht die eine Parabel durch diejenigen Kreise, welche von k ausgeschlossen sind. Der Scheitelpunkt ist in diesem Falle der Mittelpunkt von HD. Die andere Parabel entsteht durch diejenigen Kreise, welche k einschliessen. Der Scheitelpunkt ist dann der Mittelpunkt von HE. Wenn der Kreis von der Geraden getroffen wird, so gehen beide Parabeln durch die Schnittpunkte. In diesem Falle kommen bei jeder der beiden Parabeln sowohl Kreise in Betracht, welche von k ausgeschlossen sind, als auch Kreise, welche von k eingeschlossen sind. Dagegen kommen keine Kreise vor, welche den Kreis k einschliessen.

23) Man lasse in den Uebungen 17) und 18) den Mittelpunkt des einen Kreises auf der Centralen in unendliche Ferne rücken, während der eine Schnittpunkt dieses Kreises mit der Centralen an seiner Stelle bleibt. Der Kreis geht dadurch in eine Gerade über, und der in diesen Uebungen betrachtete geometrische Ort wird zu einer Parabel. Man beobachte diesen Uebergang in jedem der sechs Fälle, welche in Uebung 17) und 18) aufgeführt sind.

Andeutung. Für den Fall von 17α stelle man sich vor, dass die Gerade g in Fig. 26 dadurch entstanden sei, dass der Mittelpunkt F' des Kreises k' in 17) nach der rechten Seite in unendliche Ferne gerückt sei. Die Ellipse in 17α geht alsdann in eine Parabel über, welche diesem Uebergange zufolge als eine Ellipse angesehen werden kann, deren einer Brennpunkt F' in unendlicher Ferne gelegen ist. Die Kreise c schliessen in diesem Falle den Kreis k ein. Wird dagegen der Fall 18α) ebenso behandelt, so kommt man zu den Kreisen c, welche g und k berühren, aber von dem Kreise k ausgeschlossen sind. Betrachten wir noch Uebung 17γ. Die Gerade g in Fig. 26 denke man sich dadurch entstanden, dass der Mittelpunkt F' des Kreises k' in Uebung 17γ nach der linken Seite in unendliche Ferne gerückt sei. Die Hyperbel von 17γ geht nun in eine Parabel über, welche somit als eine Hyperbel betrachtet werden kann, von deren Brennpunkten der eine F' in unendliche Ferne gerückt ist. Die Hyperbel in 17γ besteht aber aus zwei Aesten. Dem einen Aste gehören diejenigen Kreise c zu, welche k und k' berühren und von beiden Kreisen ausgeschlossen sind. Diese Kreise gehen in Kreise über, welche g und k (Fig. 26) berühren und von k ausgeschlossen sind, deren Mittelpunkte offenbar diejenige Parabel bilden, deren Scheitel im Mittelpunkte von HD (Fig. 26) gelegen ist. Diejenigen Kreise aber, welche k und k' (in Uebung 17γ) berühren und beide Kreise einschliessen, gehen offenbar bei dem Uebergange zu Fig. 26 in die eine Gerade über, welche k in E berührt. Der ganze zweite Ast der Hyperbel schrumpft also in den unendlich fernen Punkt der Parabel zusammen. Man weiss aus der Andeutung zu Uebung 17, dass die gemeinsamen Tangenten von k und k', welche durch den äussern Aehnlichkeitspunkt dieser Kreise gehen, wenn man sie als Kreise von unendlich grossem Radius betrachtet, zu den Asymptoten oder den unendlich fernen Punkten der Hyperbel in Uebung 17γ führen. Diese gemeinsamen Tangenten fallen beim Uebergange zu Fig. 26 auch in die Gerade zusammen, welche k in E berührt. Man sieht hieraus, dass, wenn die Hyperbel dadurch in die Parabel übergeht, dass ein Brennpunkt in unendliche Ferne rückt, dabei zu-

gleich die beiden unendlich fernen Punkte der Hyperbel in einen einzigen zusammenfallen.

24) Eine Ellipse oder Hyperbel zu zeichnen, wenn die beiden Brennpunkte und

α) eine Tangente a,
β) ein Curvenpunkt A

gegeben sind (bei β zwei Lösungen, eine Ellipse und eine Hyperbel).

Anmerkung zu Ueb. 24). Es gibt unendlich viele Ellipsen und Hyperbeln, welche zwei gegebene Punkte F und F' zu Brennpunkten haben (confocale Curven). Eine beliebige unter den Ellipsen schneidet keine andere Ellipse, aber sie schneidet alle Hyperbeln rechtwinklig. Durch jeden Punkt der Ebene geht eine der Ellipsen und eine der Hyperbeln.

25) Eine Ellipse oder Hyperbel zu zeichnen, wenn ein Brennpunkt F', die Richtung der grossen Axe und

α) zwei Tangenten a und b,
β) eine Tangente a mit ihrem Berührungspunkt A,
γ) zwei Curvenpunkte A und B (2 Lösungen)

gegeben sind.

Andeutung. Bei den Uebungen 25) kommt es darauf an, die Curve als geometrischen Ort nach 4) oder 9) darzustellen und hierzu den Kreis k (siehe Uebung 4 oder 9) zu bestimmen, dessen Mittelpunkt der zweite Brennpunkt F ist. Durch jede gegebene Tangente ist, wie leicht zu sehen, ein Punkt von k bestimmt. Durch jeden gegebenen Curvenpunkt ist ein Kreis bestimmt, welcher von k berührt werden muss. Zu γ) sei noch Folgendes bemerkt: Man ziehe durch F' zwei Kreise l und i mit den Mittelpunkten A und B. Der gesuchte Kreis k muss l und i berühren und seinen Mittelpunkt auf dem durch F' gezogenen Träger g der grossen Axe haben. Man suche zunächst nach § 4, Ueb. 16 denjenigen Kreis k auf, für welchen die Berührungen von l und i gleichartig sind. Man hat nach § 4, Ueb. 16 in dem Kreise l die Polare des äusseren Aehnlichkeitspunktes von l und i zu ziehen und diese Gerade mit der durch A zu g gezogenen Parallelen in Q zu schneiden. Sodann hat man die Potenzlinie von l und i mit g in einem Punkte zu schneiden, welcher bei § 4, Ueb. 16 P genannt ist. PQ trifft den Kreis l in zwei Punkten, welche Berührungspunkte zweier Kreise k sind, die der Aufgabe genügen. Da aber hier P nichts anderes als der Punkt F' ist, welcher auf beiden Kreisen l und i liegt, und der Punkt F', als Kreis von unendlich kleinem Radius betrachtet, selbst eine dieser beiden Lösungen darstellt, so erhält man ausserdem nur

einen Kreis k, der l und i gleichartig berührt. Ebenso erhält man für die ungleichartige Berührung nur eine Lösung.

26) Eine Ellipse oder Hyperbel zu zeichnen, wenn ein Brennpunkt F' und

α) drei Tangenten a, b, c,
β) zwei Tangenten a und b und der Berührungspunkt A von a,
γ) zwei Curvenpunkte A und B und die Tangente a in A (2 Lösungen),
δ) drei Curvenpunkte A, B, C (4 Lösungen)

gegeben sind.

Andeutung. Siehe die Andeutung zu Ueb. 25. Zu δ) sei noch Folgendes bemerkt: Ziehe drei Kreise l, i, m (Fig. 27) durch F' um die Mittelpunkte A, B, C. Der gesuchte Kreis k (Andeutung zu Ueb. 25) muss die Kreise l, i, m berühren. Die Construction dieses Kreises führt also auf § 4, Ueb. 19. Es gibt im allgemeinen Falle 4 Paare von Lösungen, entsprechend den 4 Fällen α, β, γ, δ in § 4, Ueb. 19). Man hat nach dem dort Gesagten einen der Kreise l, i, m mit der Verbindungslinie zweier Punkte Q und P zu schneiden, um die Berührungspunkte dieses Kreises mit zwei Kreisen zu finden, welche ein Paar der Lösungen vorstellen. Der Punkt P ist aber hier durch den allen drei Kreisen l, i, m gemeinsamen Punkt F' dargestellt. F' als Kreis von unendlich kleinem Radius betrachtet, stellt in jedem Paare von Lösungen eine dieser Lösungen dar. Man erhält also nur vier Kreise, welche l, i, m berühren. Ihre Mittelpunkte können als Lagen des 2ten Brennpunktes angenommen werden und sind in Fig. 27 alle mit F bezeichnet. Man erkennt, dass in Fig. 27 eine Ellipse und drei Hyperbeln als Lösungen erhalten werden.

27) Eine Parabel zu zeichnen, wenn der Brennpunkt, die Axenrichtung und

α) eine Tangente,
β) ein Curvenpunkt

gegeben sind.

28) Eine Parabel zu zeichnen, wenn der Brennpunkt und

α) zwei Tangenten,
β) eine Tangente mit ihrem Berührungspunkte,
γ) zwei Curvenpunkte (2 Lösungen)

gegeben sind.

Andeutung zu γ). Die Leitlinie muss zwei leicht zu bestimmende Kreise berühren.

29) Eine Parabel zu zeichnen, wenn die Leitlinie und

α) zwei Curvenpunkte (2 Lösungen),
β) ein Curvenpunkt und die zugehörige Tangente,
γ) zwei Tangenten

gegeben sind.

30) Welches ist der geometrische Ort für die Durchschnittspunkte je zweier Radien zweier Kreise k und k', wenn diese Radien nach Punkten gezogen sind, welche

α) für den innern Aehnlichkeitspunkt von k und k' invers sind,
β) für den äussern Aehnlichkeitspunkt von k und k' invers sind.

Andeutung. Diese geometrischen Oerter fallen mit denjenigen von Uebung 17) und 18) zusammen.

31) Wo befinden sich die Scheitelpunkte der grossen Axe bei denjenigen Ellipsen oder Hyperbeln, welche die geometrischen Oerter in Uebung 30) darstellen?

Antwort. In der Mitte zwischen je zwei inversen Punkten der Centralen.

32) Eine Ellipse (Hyperbel) als geometrischen Ort nach 17), 19) oder 30) darzustellen, wenn die Brennpunkte F und F', sowie ein Scheitelpunkt S der grossen Axe gegeben sind.

Andeutung. F und F' müssen die Mittelpunkte von k und k' sein. Ausserdem müssen zwei Punkte der Centralen FF', welche von S gleichweit abstehen, als inverse Punkte von k und k' angenommen werden.

33) Die Aufgabe 32) kann auf beliebig viele Weisen gelöst werden. Man füge deshalb noch die Bedingung hinzu, dass

α) k und k' sich berühren,
β) k einen gegebenen Radius hat,
γ) k zu einem Punkte zusammenschrumpft.

34) Eine Parabel als geometrischen Ort nach 22) darzustellen, wenn der Brennpunkt und der Scheitelpunkt gegeben sind.

35) Die Aufgabe 34) kann auf beliebig viele Weisen gelöst werden. Man füge deshalb noch die Bedingung hinzu, dass

α) g und k sich berühren,
β) k einen gegebenen Radius hat,
γ) k zu einem Punkt zusammenschrumpft (siehe Ueb. 14).

36) Die Fusspunkte der von einem Brennpunkte einer Ellipse auf die Tangenten gefällten Senkrechten liegen auf einem Kreise.

37) Wenn der Scheitel eines rechten Winkels sich auf einem Kreise bewegt und der eine Schenkel durch einen festen Punkt geht, so berührt der andere Schenkel eine Ellipse oder Hyperbel.

38) Die Fusspunkte der von dem Brennpunkte einer Parabel auf die Tangenten gefällten Senkrechten liegen auf einer Geraden.

39) Wenn der Scheitel eines rechten Winkels sich auf einer Geraden bewegt und ein Schenkel durch einen festen Punkt geht, so berührt der andere eine Parabel.

40) Wenn die Berührungspunkte zweier Tangenten an eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel mit einem Brennpunkte in einer Geraden liegen, so steht diejenige Gerade, welche den Brennpunkt mit dem Schnittpunkte der Tangenten verbindet, auf der Berührungssehne senkrecht.

41) Für Fig. 24 des Anhangs zu beweisen, dass die Winkel FMA und $F'MB$, welche die Leitstrahlen des Punktes M mit den durch M gezogenen Ellipsentangenten bilden, einander gleich sind.

Andeutung. Der Winkel DMF' ist ein Winkel in dem Dreieck, welches als Seiten die Leitstrahlen des Punktes M und die grosse Axe hat. Dieser Winkel kann als $\sphericalangle FMF' + 2 . \sphericalangle FMA$ dargestellt werden. Durch Verwechslung der Brennpunkte bei der Construction in Fig. 24 des Anhangs muss dieser Winkel auch als $\sphericalangle FMF' + 2 . \sphericalangle F'MB$ dargestellt werden können. Daraus ergibt sich die Behauptung.

42) Der Winkel AMB der beiden Tangenten in Fig. 24 des Anhangs ist gleich dem Winkel $F'MD$ oder $F'MC$.

Andeutung. Der Beweis folgt aus 41).

43) Alle Punkte, von welchen aus zwei auf einander normale Tangenten der Ellipse gezogen werden können, liegen auf einem Kreise. Man beweise dies und bestimme den Radius des Kreises.

Andeutung. Der Winkel $F'MD$ in dem durch r, r', $2a$ (r und r' sind die Leitstrahlen des Punktes M) gebildeten Dreieck muss nach 42) recht sein. Man hat daher $r^2 + r'^2 = 4a^2$. Nun folgt aus den Uebungen zu G. I, § 6, Ueb. 53, dass M auf einem um den Mittelpunkt der Ellipse beschriebenen Kreise gelegen ist. Auch ergibt sich aus jener Uebung, dass der Radius dieses Kreises als Mittellinie des Dreiecks FMF' den Werth $\sqrt{2a^2 - e^2}$ hat, wo e die Hälfte des Abstandes FF' ist.

44) Es sei eine Ellipse gegeben. Man denke sich von einem Punkte M ausserhalb der Tangenten MA und MB (Fig. 24 des Anhangs) an die Ellipse gezogen. Der geometrische Ort für diejenigen Punkte M, deren Berührungssehne AB durch einen Brennpunkt F geht, ist eine zum Träger der grossen Axe senkrechte Gerade l, welche Leitlinie der Ellipse heisst. Dem Brennpunkte F' gehört eine zweite Leitlinie l' zu (siehe Fig. 28). Man beweise diese Behauptung und bestimme den Abstand FH der Leitlinie l von dem Brennpunkte F.

Andeutung. Wenn die Punkte A, B, F in Fig. 24 des Anhangs in einer Geraden lägen, so müsste der Winkel MFB nach Ueb. 40 ein rechter sein. Weil aber die Winkel MFB und MCB gleich sind, so ist das Dreieck MCF' bei C rechtwinklig und man hat $MF'^2 - MC^2 = CF'^2$ oder $r'^2 - r^2 = 4a^2$. Nach den Uebungen zu G. I, § 6, Ueb. 64 ist also der geometrische Ort des Punktes M eine auf FF' senkrechte Gerade. Um FH in Fig. 28 zu bestimmen, hat man nach dem Vorigen $HF'^2 - HF^2 = 4a^2$ oder $(HF' + HF)(HF' - HF) = 4a^2$. Da aber $HF' - HF = FF' = 2 \cdot e$, so ergibt sich $HF' + HF = 2 \cdot \frac{a^2}{e}$ und hieraus berechnet sich

$$HF' = \frac{a^2}{e} + e; \quad HF = \frac{a^2}{e} - e.$$

Der Werth von HF kann noch in der Form $\frac{a^2 - e^2}{e} = \frac{b^2}{e}$ geschrieben werden, wo b die kleine Axe der Ellipse ist.

45) Für jeden Punkt B der Ellipse (Fig. 28) hat das Verhältniss $\frac{BF}{BE}$ der Abstände nach dem Brennpunkte F und der Leitlinie l einen constanten Werth ε, so dass immer $BF = \varepsilon \cdot BE$. Man beweise dies und bestimme den Werth von ε.

Andeutung. B in Fig. 28 sei der Berührungspunkt einer Ellipsentangente, welche die beiden Leitlinien in C und D trifft. Die Dreiecke CFB und $DF'B$ sind bei F und F' rechtwinklig (Ueb. 40) und wegen der Gleichheit der Winkel bei B (§ 17) ähnlich. Man hat daher $BF = m \cdot BC$ und $BF' = m \cdot BG$, wo m ein Proportionalitätsfactor ist. Da aber die Abstände BC und BD sich wie die senkrechten Abstände BE und BG verhalten, so hat man mit Anwendung eines andern Proportionalitätsfactors ε auch $BF = \varepsilon \cdot BE$ und $BF' = \varepsilon \cdot BG$. Um ε zu bestimmen, erhält man durch Addition $BF + BF' = 2a = \varepsilon \cdot EG$. Der Abstand EG der beiden Leitlinien findet sich aber aus 44); er ist $\left(\frac{a^2}{e} + e\right) + \left(\frac{a^2}{e} - e\right) = 2 \cdot \frac{a^2}{e}$. Somit hat man $a = \varepsilon \cdot \frac{a^2}{e}$ oder $\varepsilon = \frac{a \cdot e}{a^2} = \frac{e}{a}$. Der Proportionalitätsfactor ε ist also das Verhältniss $\frac{e}{a}$ oder $\frac{2 \cdot e}{2 \cdot a}$ der doppelten Excentricität zur grossen Axe. Derselbe wird die numerische Excentricität der Ellipse genannt und eben mit dem an e erinnernden Buchstaben ε bezeichnet. ε ist (für die Ellipse) kleiner als die Einheit. Der Abstand FH in Fig. 28 kann nun auch $\frac{a^2 - a^2\varepsilon^2}{a \cdot \varepsilon} = a \cdot \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon}$ geschrieben

werden. Der Abstand $FH = a \cdot \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon}$ des Brennpunktes F in Fig. 28 wird durch den Scheitelpunkt S nach dem Verhältniss $\varepsilon : 1$ getheilt, also ist

$$SH = \frac{FH}{1+\varepsilon} = a \cdot \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \text{ und } SF = \varepsilon \cdot \frac{FH}{1+\varepsilon} = a(1-\varepsilon).$$

Der Abstand SF' ist daher $a(1-\varepsilon) + 2a \cdot \varepsilon = a(1+\varepsilon)$.

46) Die zum Punkte H (Fig. 28) der Leitlinie l gehörige Berührungssehne RO, welche durch den Brennpunkt F geht (Ueb. 44) und der Symmetrie wegen auf der grossen Axe senkrecht steht, heisst der „Parameter" der Ellipse. Die Hälfte FO des Parameters (Halbparameter) wird mit p bezeichnet und nach Ueb. 45 hat man $p = \varepsilon \cdot FH = a(1-\varepsilon^2)$. Da die kleine Axe b der Ellipse $a^2 - e^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$ ist, so gilt die Gleichung $p \cdot a = b^2$ oder $2 \cdot p \cdot 2 \cdot a = (2b)^2$; die kleine Axe ist die mittlere Proportionale zwischen der grossen Axe und dem Parameter.

47) Eine Ellipse ist bestimmt durch den Brennpunkt F, die zugehörige Leitlinie l und

α) die numerische Excentricität ε,
β) den Halbparameter p,
γ) einen Ellipsenpunkt (B in Fig. 28).

Andeutungen. α) Die Senkrechte FH (Fig. 28) liefert die Richtung der grossen Axe. Durch die Grössen FH und ε kann man a und $e = a \cdot \varepsilon$ rechnen. Dadurch kommt man zur Kenntniss des andern Brennpunktes. β) Durch FH und p berechnet man ε. γ) Durch BF und BE kommt man auf ε.

48) Man führe alle Betrachtungen, die in den Uebungen 40 bis 48 vorgenommen wurden, auch für die Hyperbel durch.

Andeutungen. Bei 44) findet man auch $HF'^2 - HF^2 = 4a^2$, aber nun ist nicht $HF' - HF$, sondern $HF' + HF$ gleich $2e$ zu setzen und man findet $HF = e - \frac{a^2}{e} = \frac{e^2 - a^2}{e}$. Die numerische Excentricität ε findet man wieder gleich $\frac{e}{a}$, aber hier ist dieser Werth grösser als die Einheit, während er bei der Ellipse kleiner als 1 ist. Man findet also, dass bei Ellipse, Hyperbel und Parabel das Verhältniss der Abstände eines Curvenpunktes von dem Brennpunkte F und der zugehörigen Leitlinie einen constanten Werth ε hat. Derselbe ist bei der Ellipse kleiner als 1, bei der Hyperbel grösser als 1 und bei der Parabel gleich 1.

49) Man ziehe von einem Punkte M der Leitlinie einer Parabel Tangenten an die Parabel und beweise

α) dass diese Tangenten sich unter rechtem Winkel schneiden,
β) dass die Berührungssehne durch den Brennpunkt geht.

Andeutung. α) Die Punkte F, C, D in Fig. 29 des Anhangs liegen auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte M. Wenn M auf der Leitlinie liegt, so ist CD Durchmesser des Kreises und der Peripheriewinkel CFD beträgt 90^0. Die Tangenten, welche die Mittelsenkrechten von FC und FD sind, müssen sich also auch unter rechten Winkeln schneiden. β) Wenn M (Fig. 29 des Anhangs) auf der Leitlinie liegt, so sind die Winkel MCA und MDB recht. Daher müssen die ihnen entsprechend gleichen Winkel MFA und MFB auch recht sein, so dass BFA einen gestreckten Winkel vorstellt.

50) Man beweise die Umkehrung der beiden Sätze in Ueb. 49.

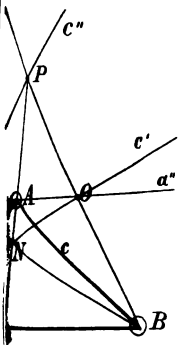
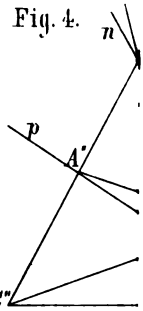


Fig. 4.



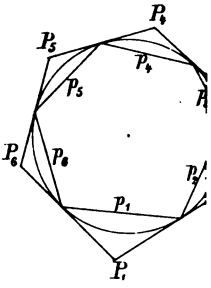
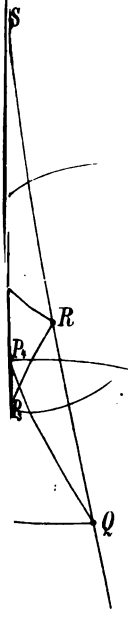


Fig. 10.



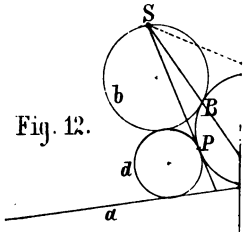
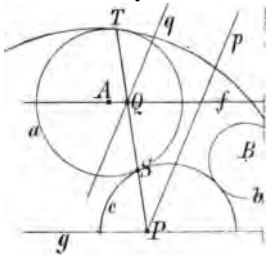


Fig. 12.

Fig. 14.



ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Soeben ist erschienen und in allen Buchhandlungen zu haben:

Methodisch geordnete

Aufgabensammlung

mehr als 8000 Aufgaben enthaltend

über alle Theile der

Elementar-Arithmetik

für Gymnasien, Realschulen und polytechnische Lehranstalten.

Von

E. Bardey.

Vierte, durch Einführung der neuen Maaße und Münzen veränderte Doppel-Auflage.

8. geh. Preis 2 Mk. 70 Pf.

Selten wol hat ein Schulbuch so schnell allgemeine Verbreitung gefunden als die vorliegende Aufgabensammlung, von welcher in drei Jahren über 11000 Exemplare abgesetzt wurden.

Diese Aufgabensammlung enthält vierzig Abschnitte, beginnt mit Vorübungen und einer Einführung in die Buchstabenrechnung und endigt mit den Gleichungen des vierten Grades und der Auflösung der Gleichungen durch Näherung. Sie ist dazu bestimmt, in den Händen der Schüler zu sein und beim Unterricht zu Grunde zu liegen.

Die Zahl der Aufgaben sowol schwieriger als auch leichter und einfacher Art ist so groß, daß sie nicht nur für die fähigsten Schüler ausreichen wird, sondern daß mit ihrer Hülfe auch die schwächeren Schüler zur vollständigen Klarheit der vorgetragenen Sätze, zur Geläufigkeit in der Anwendung derselben und zur Fertigkeit im Lösen der betreffenden Aufgaben gebracht werden können.

Um das Interesse der Schüler rege zu erhalten und sie zu befähigen, die Rechnung auf recht verschiedenartige Verhältnisse anzuwenden, ist eine möglichst große Mannigfaltigkeit der Aufgaben angestrebt und auf eine stufenmäßige Reihenfolge derselben alle Sorgfalt verwendet worden.

Die Gleichungen des ersten und zweiten Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten und ihre Anwendungen sind als der wichtigste und interessanteste Theil der Arithmetik in so umfassender Weise bearbeitet, wie es bis jetzt schwerlich in einer Aufgabensammlung oder in einem Lehrbuche geschehen ist.

Ordnung und Uebersichtlichkeit der Darstellung machen das Buch ganz besonders empfehlenswerth. Der Schüler wird sich leicht orientiren und es nicht ungern in die Hand nehmen.

Während schon bei der zweiten Auflage als wesentlich neuer Bestandtheil Aufgaben über den binomischen Satz hinzugekommen sind und außerdem in den übrigen Abschnitten die Aufgaben noch wesentlich vermehrt wurden, sind in dieser vierten Auflage noch manche Veränderungen vorgenommen und ist das Material um volle 16 Seiten vermehrt worden, so daß das Buch jetzt mehr als 8000 Aufgaben enthält.

In dieser vierten Auflage sind die neuen Maße und Münzen eingeführt. Der Thaler findet sich nur noch in einigen Aufgaben. Die süddeutschen Gulden zu 60 Kreuzer kommen nicht mehr vor, nur österreichische Gulden zu 100 Kreuzer.

Die Abschnitte über Zerlegung in Faktoren und Heben der Brüche sind in einen Abschnitt (VIII) zusammengezogen. Abschnitt X über Proportionen ist neu hinzugekommen. Der Abschnitt über Gaußsche Logarithmen ist gestrichen. Die Veränderung der Nummern der Abschnitte giebt das Inhaltsverzeichniß. Bei jedem Abschnitt steht die frühere Nummer, wenn diese eine andere ist, in Klammern daneben. Dasselbe findet statt bei den Aufgaben, welche jetzt eine andere Nummer erhalten haben.

In II, IV und VII sind einige Aufgaben über neue Maße und Münzen hinzugefügt, damit die Schüler sich an dieselben gewöhnen und einsehen, wie leicht sich manche früher unangenehme Aufgabe jetzt ausführen läßt: II, 48 und 49; VI, 153— 158; VII, 89—102. — XI (Potenzen) ist um etwa 60 Aufgaben (165—174) über Zerlegung in Faktoren, Heben der Brüche und Addition der Brüche vermehrt. — Von den eingekleideten Aufgaben in XXII, XXIV, XXIX—XXX sind einige Aufgaben wegen der veränderten Einwohnerzahl der Städte, einige auch wegen der Reichsmünze geändert. — XXV Nr. 142_1—142_4 standen früher in der dritten Stufe, Nr. 37—50 S. 204 in der zweiten Stufe. — In dem kleinen Abschnitt über Maxima und Minima sind zwei andere Methoden und 40 Aufgaben hinzugefügt (134—148). — XXXIII (Zinseszinsrechnung) ist um die Hälfte der Aufgaben vermehrt, alle mit dem Index sind neu; geändert sind 3—6, 10—13, 18, 19, 26, 40—42 und 49. — XXXV (Wahrscheinlichkeitsrechnung) ist ganz umgearbeitet.

Außer diesen größeren Veränderungen und einigen zerstreuten, mit einem Strich bezeichneten Aufgaben sind noch, um den Gebrauch der neuen Auflage neben den früheren zu erleichtern, als neu oder geändert zu notiren: S. 28, 37 u. 38; S. 33, 9—20, 27—31_1; S. 34, 51—55_1; S. 44, 100—103; 49, 196_1 u. 198_1; S. 59, 38_1—38_5; S. 62, 39_1—39_7; S. 63, 83_2—83_{10}; S. 65, 18_1—18_7; S. 67, 21_1—21_4; S. 82, 71—75; S. 90, 74_2—74_4; 79—82; S. 91, 98—101; S. 216, 106_1—106_7; S. 266, 48d—52.

Trotz der wesentlichen Veränderungen, welche das Buch in dieser neuen Auflage erfahren hat, wird zwar neben derselben der Gebrauch der früheren Auflage nicht unthunlich sein, die Verlagshandlung ist aber doch gern bereit, sowol den Lehrern, welche das Buch schon eingeführt haben, als auch denjenigen, welche es noch einführen wollen, ein Freiexemplar der neuen Auflage zu liefern. Nur bitte ich, sich deshalb direkt an mich zu wenden, oder eine schriftliche Notiz einer Buchhandlung zur Uebermittelung an mich zu übergeben. Dagegen bin ich nicht in der Lage, das ebenfalls neu gedruckte Heft, welches die Resultate enthält, gratis liefern zu können, da dasselbe nur an Lehrer abgegeben wird, ein anderweitiger Absatz, durch welchen die bedeutenden Herstellungskosten gedeckt werden könnten, also nicht stattfindet. Das Resultatheft wird jedem Lehrer, der sich unter Einsendung von 1 Mark in Briefmarken direkt an mich wendet, direkt zur Post franko übersandt.

Leipzig, im Februar 1875.

B. G. Teubner.

LEITFADEN

DER

EBENEN GEOMETRIE,

MIT BENUTZUNG

NEUERER ANSCHAUUNGSWEISEN FÜR DIE SCHULE

BEARBEITET VON

DR. HUBERT MÜLLER,

OBERLEHRER AM KAISERLICHEN LYCEUM IN METZ,
FRÜHER AUSSERORDENTL. PROFESSOR DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT
DER UNIVERSITÄT FREIBURG I. B.

IN ZWEI THEILEN:

I. DIE GERADLINIGEN FIGUREN UND DER KREIS.
II. DIE KEGELSCHNITTE UND DIE ELEMENTE DER NEUEREN GEOMETRIE

ZWEITER THEIL.

DIE KEGELSCHNITTE UND DIE ELEMENTE DER NEUEREN GEOMETRIE.

LEIPZIG.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1875.

T. E.

Vorwort.

Der zweite Theil des Leitfadens der ebenen Geometrie soll ein Schulbuch darstellen, welches sich nicht auf die einleitenden Sätze der neueren Geometrie beschränkt, sondern das Wesentliche aus der Theorie der Kegelschnitte dem Unterricht leichter zugänglich macht.

Die Darstellung bezieht sich an verschiedenen Stellen auf Gegenstände, welche im ersten Theile behandelt sind. Um jedoch diesen zweiten Theil unabhängig zu machen, sind einige Wiederholungen aufgenommen worden. Dazu gehört die Einleitung, deren Paragraphen besonders nummerirt sind. Ferner wird der Leser des ersten Theiles in Abschnitt I, IV und V des zweiten Cursus bekannte Stellen finden.

Man ersieht daraus, dass die Darstellung in möglichst vielen Punkten an Bekanntes anzuknüpfen sucht, um leichte Zugänge zu verschiedenen Theilen des Stoffes zu finden und den letzteren gleichmässig zu durchforschen.

Der Leser wird, wie ich hoffe, erkennen, dass die Wissenschaftlichkeit der Darstellung und die Symmetrie des Aufbaues dadurch nicht gelitten hat.

Die aus den Eigenschaften der Brennpunkte sich ergebenden Sätze der Ellipse, Parabel und Hyperbel sind in dem ersten Cursus selbstständig entwickelt. Der Schluss des Buches kommt wieder auf diesen Anfang zurück, indem gezeigt wird, dass die mit Hülfe der neueren Geometrie erforschten Kegelschnitte mit den genannten Curven identisch sind. Wenn Theile des dritten Cursus sich auf Raumgebilde beziehen und einige wenige Sätze der Stereometrie benützen,

so sind diese Betrachtungen nur als Mittel zum Zweck anzusehen und nehmen dem Buche nicht das Recht auf seinen Titel. Die zahlreichen und zum Theile mit Andeutungen versehenen Uebungen sollen zur Anschauung bringen, dass die neuere Geometrie eine Disciplin ist, welche mit einfachen Mitteln ein grosses Gebiet beherrscht.

Dass ich aus den Schriften über neuere Geometrie von Steiner, Staudt, Chasles, Paulus, Reye indirekten oder direkten Nutzen für die Arbeit gezogen habe, ist in der Natur der letzteren begründet. Namentlich ist § 52 nach der Géometrie supérieure von Chasles dargestellt.

Ich empfehle das Schriftchen zunächst den Herren Collegen, welche in der Lage sind, die Theorie der Kegelschnitte im Unterricht zu behandeln, glaube aber, dass auch bei dem Gebrauch zum Selbstunterrichte das Buch durch seine Einrichtung eine zweckmässige Abwechslung von Reception und Production veranlassen wird.

Metz, im Mai 1875.

Dr. **Hubert Müller.**

Inhaltsverzeichniss.

Seite

Einleitung 1

§ 1. Bezeichnung der Länge und Richtung von Strecken. — 2. Die Halbirungslinien der Winkel und Aussenwinkel eines Dreiecks. — 3. Sätze über Verhältnisse von Strecken. — 4. Die Potenz eines Punktes in Bezug auf den Kreis.

Erster Cursus.

Ellipse, Parabel und Hyperbel.

I. Abschnitt. Die Ellipse 6

§ 1. Definition der Ellipse — Brennpunkte. — 2. Axen der Ellipse. — 3. Tangenten der Ellipse.

II. Abschnitt. Die Hyperbel 10

§ 4. Definition der Hyperbel. — Brennpunkte. — 5. Axen der Hyperbel. — 6. Tangenten der Hyperbel. — 7. Asymptoten der Hyperbel.

III. Abschnitt. Die Parabel 14

§ 8. Definition der Parabel. — Brennpunkte. — 9. Tangenten der Parabel. — 10. Uebungen.

Zweiter Cursus.

Die Grundgebilde der neuern Geometrie.

I. Abschnitt. Harmonische Punkte und Strahlen. Das vollständige Viereck und Vierseit 21

§ 11. Harmonische Punkte und Strahlen. — 12. Fortsetzung. — 13. Das vollständige Viereck und Vierseit. — 14. Uebungen.

II. Abschnitt. Projectivische Grundgebilde 28

§ 15. Punktreihen und Strahlenbüschel. — 16. Projectivische Grundgebilde. — 17. Aufgaben. — 18. Allgemeine Sätze. — 19. Bedingungen der perspectivischen Lage der Grundgebilde. — 20. Von dem Sinne der Grundgebilde. — 21. Der Kreis und die projectivischen Grundgebilde.

III. Abschnitt. Die projectivischen Grundgebilde. (Fortsetzung) 35

§ 22. Unendlich ferne Punkte. — 23. Die Gegenpunkte projectivischer Punktreihen. — 24. Aehnliche Punktreihen. — 25. Aufgaben. — 26. Uebungen.

IV. Abschnitt. Involutorische Gebilde 43

§ 27. Involutorische Punktreihen und Strahlenbüschel. — 28. Der Büschel von Kreisen, welche durch zwei feste Punkte gehen. — 29. Vorbereitende Sätze. — 30. Identität involutorischer Gebilde mit projectivischen Gebilden, deren Elemente sich doppelt entsprechen. — 31. Folgerungen. — 32. Aufgaben. — 33. Uebungen.

V. Abschnitt. Pol und Polare in Bezug auf den Kreis . 51

§ 34. Pol und Polare. — 35. Conjugirte Punkte. — 36. Fortsetzung.

VI. Abschnitt. Projectivische Gebilde in schiefer Lage 56

§ 37. Aufgaben. — 38. Aufgaben. — 39. Die Curve als Punktgebilde oder als Tangentengebilde. — 40. Curven, welche das Erzeugniss projectivischer Gebilde sind. — 41. Aufgaben.

Seite

Dritter Cursus.

Projectivische Figuren. Kegelschnitte.

I. Abschnitt. Projectivische Figuren 66

§ 42. Das ebene System und der Strahlenbündel. — 43. Beziehung des ebenen Systems auf den Strahlenbündel. — 44. Beziehung ebener Systeme aufeinander. — 45. Fortsetzung. Perspectivische Abbildung ebener Figuren. — 46. Der besondere Fall, wo die Träger perspectivischer Systeme parallel sind. — 47. Die Träger der perspectivischen Systeme sind nicht parallel. — 48. Die Gegenaxen perspectivischer Systeme. — 49. Fortsetzung. — 50. Uebungen.

II. Abschnitt. Kegelschnitte. Identität derselben mit den Erzeugnissen projectivischer Gebilde . . 77

§ 51. Kegelschnitte. — 52. Identität der Kegelschnitte mit den Erzeugnissen projectivischer Gebilde. — 53. Bestimmung eines Kegelschnitts durch fünf Bedingungen. — 54. Uebungen.

Vierter Cursus.

Eigenschaften der Kegelschnitte. Identität derselben mit den Curven des ersten Cursus.

I. Abschnitt. Figuren, welche einem Kegelschnitt einbeschrieben oder umbeschrieben sind . . . 83

§ 55. Sätze von Pascal und Brianchon. — 56. Aufgaben.

II. Abschnitt. Pol und Polare 88

§ 57. Pol und Polare. — 58. Reciproke Figuren. — 59. Fortsetzung. — 60. Uebungen.

III. Abschnitt. Der Kegelschnitt und die unendlich ferne Gerade 97

§ 61. Eintheilung der Kegelschnitte. — 62. Die Kegelschnitte der ersten und zweiten Art haben einen Mittelpunkt. — 63. Conjugirte Durchmesser. — 64. Einbeschriebene und umbeschriebene Parallelogramme. — 65. Die Kegelschnitte der dritten Art haben keinen Mittelpunkt. — 66. Axen der Kegelschnitte. — 67. Uebungen.

IV. Abschnitt. Identität der Kegelschnitte mit den Curven des ersten Cursus 109

§ 68. Identität der Kegelschnitte mit den Curven des ersten Cursus. — 69. Uebungen.

Einleitung.

Bezeichnung der Länge und Richtung von Strecken. § 1.

Um für Strecken auf derselben Geraden oder auf parallelen Geraden die Beziehung zwischen ihren Längen und diejenige zwischen ihren Richtungen durch dasselbe Zeichen auszudrücken, verfährt man folgendermassen.

Die zwei entgegengesetzten Richtungen einer Geraden werden als positive und negative Richtung unterschieden. Es ist der Wahl überlassen, welche Richtung man als die positive ansehen will, nur müssen, wenn parallele Gerade in der Figur vorhanden sind, die positiven Richtungen derselben übereinstimmen. Die Längenzahl einer Strecke erhält nun das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die Richtung vom Anfangspunkte nach dem Endpunkte mit der positiven oder negativen Richtung der Geraden übereinstimmt und die so definirte algebraische Grösse wird bezeichnet, indem man den Buchstaben des Endpunktes hinter denjenigen des Anfangspunktes schreibt und dieses Symbol mit einer Klammer umgibt. Wenn in Fig. 1 der Pfeil die positive Richtung bezeichnet und ca als Längeneinheit angesehen wird, so ist $(ca) = +1$, $(ab) = +3$, $(ba) = -3$, $(ab) = -(ba)$.

Fig. 1.

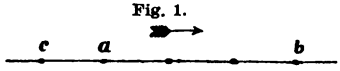
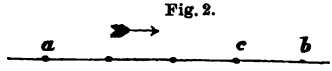


Fig. 2.



Der Quotient (das Verhältniss) und das Product zweier Strecken werden nach den Regeln der Algebra gebildet, so dass dieselben positiv oder negativ werden, je nachdem die beiden Strecken gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben.

So ist zum Beispiel das Verhältniss $(ca):(cb)$, welches das Abstandsverhältniss des Punktes c von den Punkten a und b heisst, positiv in Fig. 1 $[(ca):(cb) = +(1:4)]$ und negativ in Fig. 2 $[(ca):(cb) = -(3:1)]$.

Nimmt man jedoch auf die Richtung der Strecken keine Rücksicht, so bezeichnet man die Strecken durch die Buchstaben der beiden Endpunkte in beliebiger Ordnung und ohne Klammer. Diejenigen Zahlen, welche die Länge von Strecken, ihr Verhältniss oder Product ausdrücken, erhalten kein Vorzeichen, sondern sind als absolute Zahlen zu betrachten.

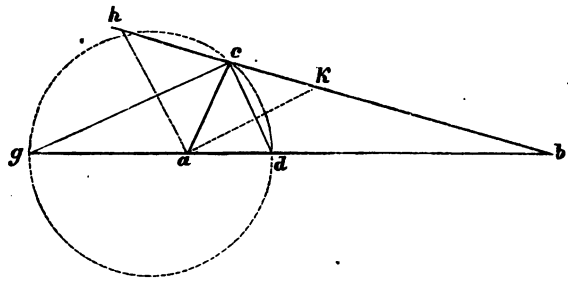
§ 2. Die Halbirungslinien der Winkel und Aussenwinkel eines Dreiecks.

a) Die Halbirungslinien eines Dreieckwinkels und seines Nebenwinkels theilen die gegenüberliegende Seite innen und aussen nach dem Verhältniss der anliegenden Seiten.

α) Diejenigen Geraden, welche durch die Spitze eines Dreiecks gehen und die gegenüberliegende Seite innen und aussen nach dem Verhältniss der andern Seiten theilen, sind die Halbirungslinien des Winkels an der Spitze und seines Nebenwinkels.

Beweis. (Fig. 3.) a) Wenn die Winkel acd und dcb einander gleich sind, so beweise man, dass die durch a mit cd gezogene Parallele ah ein gleichschenkliges Dreieck ach abschneidet.

Fig. 3.



Der Parallelismus von ah und dc liefert die Proportion $da:db = ch:cb$*), woraus man durch Einsetzen von ca für ch erhält:

*) Nach I, § 63a oder aus der Aehnlichkeit zweier Dreiecke zu schliessen.

$da : db = ca : cb$. Wenn andrerseits die Winkel acg und gch gleich sind, so ziehe man ak mit gc parallel und verfahre ganz wie im Vorigen, um $ga : gb = ca : cb$ zu erhalten. Aus diesen beiden Proportionen folgt die Behauptung.

Der Beweis von α) wird indirect geführt.

Anmerkung. Wenn eine Strecke ab in d und g nach demselben Verhältniss getheilt wird, so ist auch die Strecke dg in a und b nach gleichem Verhältniss getheilt.

Beweis. Man leite aus $ga : gb = da : db$ durch Vertauschung der mittlern Glieder $ag : ad = bg : bd$ ab, woraus die Behauptung mit Berücksichtigung der gegenseitigen Lage der Punkte sich ergibt.

Sätze über Verhältnisse von Strecken. § 3.

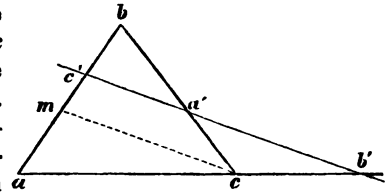
a) Wenn die Seiten eines Dreiecks abc (Fig. 4) oder ihre Verlängerungen von einer Geraden in a', b', c' geschnitten werden, so ist das Product der Abstandsverhältnisse

$$\frac{a'c}{a'b}, \frac{b'a}{b'c}, \frac{c'b}{c'a}$$*)

der Einheit gleich.

Beweis. a) a', b', c' (Fig. 4) seien Punkte einer Geraden. Zieht man cm mit derselben parallel, so kann man die Verhältnisse $b'a : b'c$ und $a'c : a'b$ durch die Verhältnisse $c'a : c'm$ und $c'm : c'b$ ersetzen. Multiplicirt man noch das Product der beiden letzten Verhältnisse mit $c'b : c'a$, so hebt sich Alles fort und es bleibt für das Product der Werth 1.

Fig. 4.



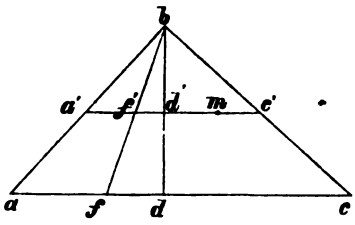
b) Wenn man durch einen Punkt Strahlen zieht, welche zwei parallele Geraden in entsprechenden Punkten schneiden, so verhalten sich die Strecken der einen Geraden, wie die entsprechenden Strecken der andern.

β) Wenn auf zwei parallelen Geraden entsprechende Punkte so liegen, dass die von einem beliebigen Punkte ausgehenden Abschnitte der einen Geraden sich wie die entsprechenden Strecken der andern verhalten, so gehen die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen Punkt.

*) Die Abstandsverhältnisse (siehe § 1) sind jedoch hier ohne Rücksicht auf die Vorzeichen der Strecken bestimmt.

Beweis. b) Wenn (Fig. 5) ac mit $a'c'$ parallel ist und aa', cc', dd', ff' durch b gehen, so sind die Verhältnisse $ba : ba'$, $bf : bf'$, $bd : bd'$, $bc : bc'$ nach einander gleich*). Die Verhältnisse $af : a'f'$, $ad : a'd'$, $fd : f'd' \ldots$ können aber durch eines dieser Verhältnisse ersetzt werden**) und müssen deshalb auch gleich sein. Aus den hieraus entstehenden Proportionen ergibt sich die Behauptung:

Fig. 5.

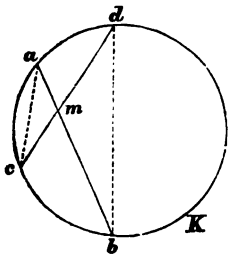


β) Wenn (Fig. 5) $af : ad : ac = a'f' : a'd' : a'c'$ und die entsprechenden Punkte auf den Parallelen in gleicher Reihenfolge liegen***), so verlängere man aa' um ff' bis zum Schnitt in b. Würden nun b, d', d nicht auf einer Geraden liegen, so müsste $a'c'$ von bd in einem andern Punkte m geschnitten werden. Dann hätte man $af : ad = a'f' : a'm$*, folglich wäre $af : ad$ von $a'f' : a'd'$ verschieden, was der Voraussetzung widerspricht.

§ 4. Die Potenz eines Punktes in Bezug auf den Kreis.

a) Wenn man durch einen Punkt Secanten eines Kreises zieht, so hat das Product der durch diesen Punkt und den Kreis begrenzten Abschnitte für jede Secante den gleichen Werth.

Fig. 6.



Beweis (Fig. 6). 1) ab und cd seien die Sehnen, welche auf zwei innerhalb des Kreises sich schneidenden Secanten liegen. Man beweise die Aehnlichkeit der Dreiecke cma und bmd, woraus die Proportion $mc : mb = ma : md$ und die Gleichung $mc \cdot md = ma \cdot mb$ folgt.

2) ab und cd (Fig. 7) seien zwei Secanten, die sich ausserhalb des Kreises schneiden. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke mcb und mad folgt: $mc : ma = mb : md$ und hieraus: $mc \cdot md = ma \cdot mb$.

b) Wenn durch einen Punkt eine Secante und eine

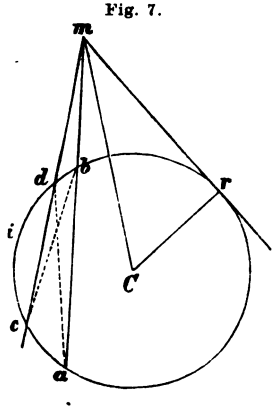
*) Mit Berücksichtigung der Zeichen: $(ba) : (ba') = (bf) : (bf') = (bd) : (bd') = (bc) : (bc')$ und im Folgenden $(af) : (a'f') = (ad) : (a'd') = (fd) : (f'd')$ nach § 1.

**) Man schliesse dies aus I, § 63a oder aus der Aehnlichkeit von Dreiecken.

***) d. h. wenn $(af) : (ad) : (ac) = (a'f') : (a'd') : (a'c')$ nach § 1.

Tangente eines Kreises gezogen werden, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zwischen der Secante und ihrem äussern Abschnitt.

Fig. 7.



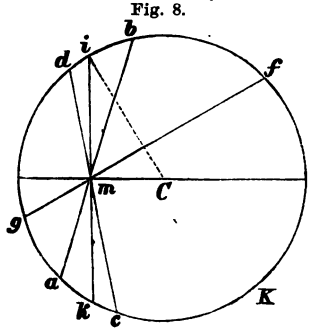
Beweis. Man denke in Fig. 7 die Strecken ar und br gezogen und beweise die Aehnlichkeit der Dreiecke arm und rbm, woraus $am : mr = rm : mb$ folgt.

Erklärung. Wenn man die Secantenabschnitte, von welchen in a) die Rede ist, von dem Schnittpunkte der Secanten aus durchlaufen denkt und nach § 1 die Vorzeichen der Abschnitte und ihrer Producte bestimmt, so werden diese Producte positiv oder negativ, je nachdem die Secanten sich ausserhalb oder innerhalb des Kreises schneiden.

Das in Grösse und Vorzeichen bestimmte Product der von einem Punkte m und einem Kreise begrenzten Secantenabschnitte heisst die Potenz des Punktes m in Bezug auf den Kreis. Dieselbe ist positiv oder negativ, je nachdem der Punkt vom Kreise aus- oder eingeschlossen ist.

c) Die Potenz eines Punktes m ist ihrem absoluten Werthe nach gleich dem Quadrate der halben kleinsten Sehne oder dem Quadrate der Tangente des Punktes m, je nachdem m von dem Kreise ein- oder ausgeschlossen ist.

Fig. 8.



Beweis 1) Wenn (Fig. 8) m von dem Kreise eingeschlossen ist, so sind die Abschnitte mi und mk der kleinsten Sehne gleich gross, daher hat man $\overline{ma} \cdot \overline{mb} = \overline{mc} \cdot \overline{md} = \overline{mg} \cdot \overline{mf} = \overline{mk} \cdot \overline{mi} = \overline{mk}^2$.

2) Wenn (Fig. 7) m von dem Kreise ausgeschlossen ist, so folgt aus b) $\overline{ma} \cdot \overline{mb} = \overline{mc} \cdot \overline{md} = \overline{mr}^2$.

d) Man erhält die Potenz eines Punktes m in Bezug auf den Kreis, wenn man das Quadrat des Radius von dem Quadrate der Entfernung des Punktes m vom Centrum abzieht.

Beweis 1) Wenn m von dem Kreise eingeschlossen ist (Fig. 8), so ist nach der Erklärung und nach c) die Potenz durch $-\overline{mi^2} = -(\overline{iC^2} - \overline{mC^2}) = \overline{mC^2} - \overline{iC^2}$ dargestellt, was zu beweisen war.

2) Wenn m von dem Kreise ausgeschlossen ist (Fig. 7), so ist die Potenz durch $\overline{mr^2} = \overline{mC^2} - \overline{Cr^2}$ dargestellt, was zu beweisen war.

Erster Cursus.

Ellipse, Hyperbel und Parabel.

I. Abschnitt.

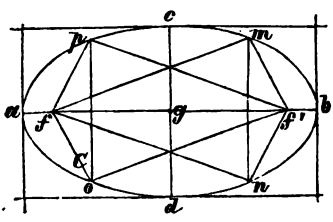
Die Ellipse.

§ 1. Definition der Ellipse. — Brennpunkte.

a) Erklärung. Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Summe der Abstände von zwei festen Punkten eine gegebene Grösse hat.

Die beiden festen Punkte (f und f' in Fig. 9) heissen die Brennpunkte der Ellipse. Diejenigen Strecken (mf und mf'), welche einen Ellipsenpunkt (m) mit den beiden Brennpunkten verbinden, heissen die Leitstrahlen des Punktes. Die Hälfte der gegebenen Länge, welcher die Summe der Leitstrahlen eines Punktes immer gleich sein muss, wird gewöhnlich mit dem Buchstaben a bezeichnet. Der Abstand (ff') der beiden Brennpunkte heisst die Excentricität der Ellipse. Ein Punkt der Ellipse bildet mit den beiden Brennpunkten ein Dreieck, dessen Grundlinie die Excentricität der Ellipse ist, während die beiden andern Seiten des Dreiecks durch die Leitstrahlen des Punktes dargestellt sind. Der constante Werth $2a$ der Summe dieser Leitstrahlen muss daher (I, § 20γ*) grösser als die Excentricität der Ellipse sein.

Fig. 9.



*) In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte.

b) Aufgabe. **Beliebig viele Punkte einer Ellipse zu construiren, wenn die beiden Brennpunkte und die Länge $2a$ gegeben sind.**

Auflösung. r und r' seien zwei Strecken, deren Summe der Länge $2a$ gleich ist. Man beschreibe um den Brennpunkt f (Fig. 9) einen Kreis mit dem Radius r und mit r' einen solchen um den Brennpunkt f'. Die Schnittpunkte dieser Kreise sind zwei Punkte m und n der Ellipse, deren Abstand mn von ff' senkrecht halbirt wird (I, § 34α). Verwechselt man bei dieser Construction die beiden Radien, so erhält man zwei andere Punkte p und o der Ellipse, deren Abstand ebenfalls von ff' senkrecht halbirt wird. Es ist noch zu bemerken, dass die beiden Kreise sich nicht mehr schneiden, sobald r so gross genommen wird, dass $r - r'$ die Excentricität ff' übertrifft.

Anmerkung. Eine sehr instructive Art, die Ellipse zu zeichnen ist die folgende. Man stecke an dem Ort der beiden Brennpunkte zwei Stifte ein und binde einen Faden zu einer Schleife, welche so lang ist als die Excentricität und die Länge $2a$ zusammengenommen. Wenn man diese Schleife über die beiden Stifte legt und mit einem dritten Stifte anzieht, so befindet sich der letztere in einem Punkte der Ellipse.

Axen der Ellipse. § 2.

a) Die Verbindungslinie der Brennpunkte (grosse Axe) und die Mittelsenkrechte der Excentricität (kleine Axe) sind Symmetrieaxen der Figur. Der Schnittpunkt der Axen ist Mittelpunkt der Ellipse.

Beweis. Die Strecken mn und po (Fig. 9) sind einander gleich und werden beide durch ff' senkrecht halbirt (§ 1b, Auflösung). $mnop$ ist also ein Rechteck, dessen Symmetrieaxen ff' und cd sich in dem Mittelpunkte desselben schneiden. Hieraus folgen die Behauptungen, wenn man bedenkt, dass zu jedem Punkte der Ellipse 3 andere gehören, welche mit ihm in derselben Weise ein Rechteck bilden (vergl. I, § 49).

b) Jede der beiden Axen schneidet die Ellipse in zwei Punkten (Scheitelpunkte der Ellipse). Die Scheitelpunkte der grossen Axe haben von dem Mittelpunkte der Ellipse die Entfernung a. Die Scheitelpunkte der kleinen Axe haben von jedem Brennpunkte dieselbe Entfernung a.

Beweis. (Fig. 9.) 1) Wenn $ga = gb = a$, so sind die Punkte a und b auf der Ellipse gelegen, denn es ist zum Beispiel für den Punkt b: $fb + f'b = fb + fa = ba = 2a$ (§ 1a).

2) Wenn $fc = f'c = a$, so ist der Punkt c auf der Ellipse gelegen, weil $fc + f'c = 2a$. Zugleich ist aber c nach I, § 23a auf der Halbirungssenkrechten von ff', das heisst auf der kleinen Axe gelegen. Dasselbe gilt für den Punkt d.

c) Zusatz. Die Tangenten*) der Ellipse in den Scheitelpunkten einer Axe stehen auf dieser Axe senkrecht.

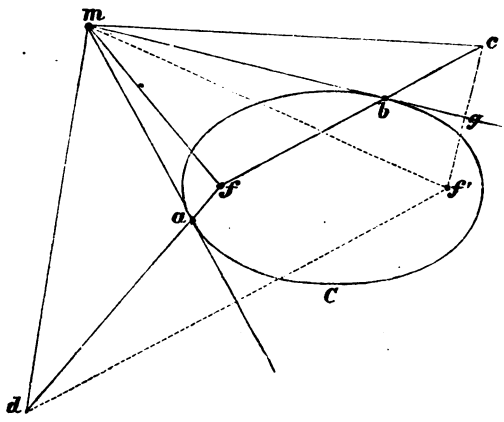
Beweis. Die Geraden mp und mn in Fig. 9 sind bezüglich senkrecht auf der kleinen und der grossen Axe. Diese Geraden gehen aber in die Tangenten der Scheitelpunkte c und b über, wenn das einbeschriebene Rechteck $opmn$ sich so verändert, dass der Punkt m dem Punkte c oder b sich unbegrenzt nähert.

§ 8. Tangenten der Ellipse.

a) Wenn diejenige Strecke, welche den Gegenpunkt eines Brennpunktes in Bezug auf eine Gerade mit dem andern Brennpunkte verbindet, die Länge $2a$ hat, so wird die Ellipse von dieser Geraden in einem Punkte jener Strecke berührt.

Beweis (Fig. 10). c sei der Gegenpunkt des Brennpunktes f' in Bezug auf die Gerade mg und die Strecke fc, welche mg in dem Punkte b schneidet, habe die Länge $2a$. Dann ist der Punkt b auf der Ellipse gelegen, denn, weil (I, § 23a) $bf' = bc$, so hat die Summe $fb + f'b$ der Leitstrahlen des Punktes b den Werth $fb + bc = 2a$. Kein anderer Punkt m der Geraden mg kann auf der Ellipse liegen, denn für ihn wäre $mf + mf' = mf + mc$ und die Summe der Seiten mf und mc in dem Dreieck mfc ist grösser als fc oder $2a$. Die Gerade mg hat also den einzigen Punkt b mit der Ellipse gemein, das heisst, sie berührt die Ellipse in b.

Fig. 10.



*) Vergleiche I. § 43 Anmerkung.

b) Zusatz. Jeder Punkt desjenigen Kreises, welcher um einen Brennpunkt mit dem Radius $2a$ beschrieben ist, stellt den Gegenpunkt des andern Brennpunktes in Bezug auf eine Tangente der Ellipse dar.

c) Diejenigen Winkel, welche eine Tangente der Ellipse mit den Leitstrahlen ihres Berührungspunktes bildet, sind gleich gross.

Beweis. Die Winkel mbf und gbf' der in dem Beweise von a) betrachteten Figur sind einander gleich, weil beide dem Winkel gbc gleich sind (bezüglich als Scheitelwinkel und aus Congruenz der Dreiecke gbf' und gbc).

d) Aufgabe. In einem gegebenen Punkte einer Ellipse die Tangente an dieselbe zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 10.) Um in dem Punkte a die Tangente an die Ellipse zu zeichnen, ziehe man fa und mache auf dieser Richtung $fd = 2a$. Der Punkt d ist der Gegenpunkt von f' in Bezug auf die gesuchte Tangente. Die Letztere selbst ist die Halbirungssenkrechte von $f'd$ (§ 3a).

e) Aufgabe. Von einem Punkte m ausserhalb der Ellipse Tangenten an dieselbe zu ziehen.

Auflösung (Fig. 10). m sei der gegebene Punkt. Man bestimme die Gegenpunkte des Brennpunktes f' in Bezug auf die gesuchten Tangenten. Da der Brennpunkt f' und sein Gegenpunkt in Bezug auf eine Tangente von jedem Punkte dieser Tangente gleichen Abstand haben, so müssen die zu construirenden Gegenpunkte auf einem Kreise liegen, der um m mit dem Radius mf' beschrieben ist. Nach § 3a) und b) sind also jene Gegenpunkte c und d die Schnittpunkte dieses Kreises mit einem andern Kreise, der mit dem Radius $2a$ um f beschrieben ist. Die gesuchten Tangenten selbst sind die Halbirungssenkrechten der Strecken $f'c$ und $f'd$.

f) Wenn man von einem Brennpunkte einer Ellipse gerade Linien nach den Berührungspunkten zweier Tangenten und nach ihrem Durchschnittspunkte zieht, so halbirt die letzte dieser 3 Geraden den Winkel der beiden ersten.

Beweis. (Fig. 10.) Die Dreiecke mfd und mfc sind congruent, weil $md = mc = mf'$, $fd = fc = 2a$ und die Seite mf beiden gemeinsam ist. Die Winkel mfd und mfc sind also einander gleich.

II. Abschnitt.

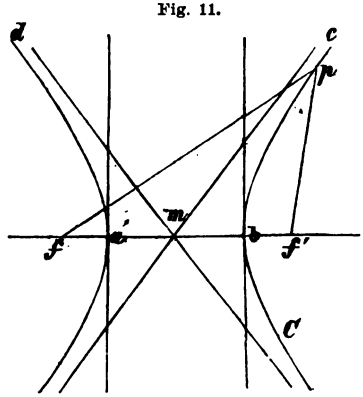
Die Hyperbel.

§ 4. Definition der Hyperbel. — Brennpunkte.

a) Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten eine gegebene Grösse hat.

Die beiden festen Punkte (f und f' in Fig. 11) heissen die Brennpunkte der Hyperbel. Diejenigen Strecken pf und pf', welche einen Hyperbelpunkt mit den beiden Brennpunkten verbinden, heissen die Leitstrahlen des Punktes. Die Hälfte der gegebenen Länge, welcher die Differenz der Leitstrahlen eines Punktes immer gleich sein muss, wird gewöhnlich mit dem Buchstaben a bezeichnet. Der Abstand ff' der beiden Brennpunkte heisst die Excentricität der Hyperbel. Ein Punkt der Hyperbel bildet mit den beiden Brennpunkten ein Dreieck, dessen Grundlinie die Excentricität der Hyperbel ist, während die beiden andern Seiten des Dreiecks durch die Leitstrahlen des Punktes dargestellt sind. Der Werth $2a$ der Differenz dieser Leitstrahlen muss daher (I, § 20c) kleiner als die Excentricität der Hyperbel sein.

Fig. 11.



b) Aufgabe. Beliebig viele Punkte einer Hyperbel zu construiren, wenn die beiden Brennpunkte und die Länge $2a$ gegeben sind.

Auflösung. r und r' seien zwei Strecken, deren Differenz der Länge $2a$ gleich ist. Man beschreibe mit dem Radius r um den Brennpunkt f (Fig. 11) einen Kreis und mit r' einen solchen um den Brennpunkt f'. Die Schnittpunkte dieser Kreise sind zwei Punkte der Hyperbel, deren Abstand von ff' senkrecht halbirt wird (I, § 34α). Verwechselt man bei dieser Construction die beiden Radien, so erhält man noch zwei andere Punkte der Hyperbel.

Es ist zu bemerken, dass die beiden Kreise sich nicht mehr schneiden, sobald r so klein genommen wird, dass die Summe $r + r'$ kleiner als die Excentricität ff' ist.

Anmerkung. Eine Erzeugung der Hyperbel durch stetige Bewegung eines Punktes ist die folgende: Man mache ein Lineal um den einen Brennpunkt f (Fig. 11) drehbar, so dass der Brennpunkt f' genau in der Richtung der Kante des Lineals liegt. Auf dieser Kante nehme man in einer beträchtlichen Entfernung r den Punkt p an. In p befestige man einen Faden von einer solchen Länge r', dass $r - r'$ gerade der Strecke $2a$ gleich ist. Das zweite Ende des Fadens befestige man in f'. Wenn man das Lineal so lange dreht, bis der Faden gespannt wird, so befindet sich der Punkt p offenbar auf der zu beschreibenden Hyperbel. Dreht man nun das Lineal allmählich gegen f' und hält man den dadurch sich lockernden Faden mit einem an dem Linealrande gleitenden Stifte gespannt, so beschreibt dieser Stift den Hyperbelbogen pb (Fig. 11).

Axen der Hyperbel. § 5.

a) Die Verbindungslinie der Brennpunkte (Hauptaxe) und die Mittelsenkrechte der Excentricität (Nebenaxe) der Hyperbel sind Symmetrieaxen der Figur. Der Schnittpunkt der Axen ist Mittelpunkt der Hyperbel.

Der Beweis ist demjenigen des entsprechenden Satzes für die Ellipse vollkommen analog.

b) Die Hauptaxe schneidet die Hyperbel in zwei Punkten (Scheitelpunkte der Hyperbel). Die Scheitelpunkte der Hauptaxe haben von dem Mittelpunkte der Hyperbel die Entfernung a. Die Nebenaxe trifft die Hyperbel nicht.

Beweis. (Fig. 11.) Wenn $ma = mb = a$, so liegen a und b auf der Hyperbel, denn $fb - f'b = fb - fa = ab = 2a$ (§ 4 *a*). Die Nebenaxe, welche in die Mittelsenkrechte von ff' fällt, kann die Hyperbel nicht treffen, weil für ihre Punkte die Differenz der Leitstrahlen Null ist.

c) Zusatz. Die Tangenten der Hyperbel in den Scheitelpunkten der Hauptaxe stehen auf der Hauptaxe senkrecht.

Der Beweis ist demjenigen des entsprechenden Satzes für die Ellipse analog.

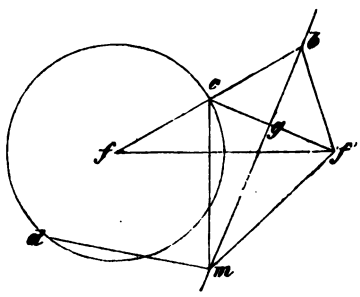
Tangenten der Hyperbel. § 6.

a) Wenn diejenige Strecke, welche den Gegenpunkt eines Brennpunktes in Bezug auf eine Gerade mit dem andern

Brennpunkte verbindet, die Länge $2a$ hat, so wird die Hyperbel von dieser Geraden in einem Punkte berührt, welcher auf der Verlängerung jener Strecke liegt.

Beweis (Fig. 12). c sei der Gegenpunkt des Brennpunktes f' in Bezug auf die Gerade mg. Die Strecke fc habe die Länge $2a$ und ihre Verlängerung treffe die Gerade mg in b. Dann ist b auf der Hyperbel gelegen, denn weil $bf' = bc$, so hat die Differenz $fb - f'b$ den Werth $fb - cb = fc = 2a$. Kein anderer Punkt m der Geraden mg kann auf der Hyperbel liegen, denn für ihn wäre $mf - mf' = mf - mc$ und die Differenz der Seiten mf und mc in dem Dreieck mfc ist kleiner als fc oder $2a$. Die Gerade mg hat also den einzigen Punkt b mit der Hyperbel gemein, das heisst, sie berührt die Hyperbel in b.

Fig. 12.



b) Zusatz. Jeder Punkt desjenigen Kreises, welcher um einen Brennpunkt mit dem Radius $2a$ beschrieben ist, stellt den Gegenpunkt des andern Brennpunktes in Bezug auf eine Tangente der Hyperbel dar.

c) Diejenigen Winkel, welche eine Tangente der Hyperbel mit den Leitstrahlen ihres Berührungspunktes bildet, sind gleich gross.

Beweis. Die Gleichheit der Winkel fbg und $f'bg$ folgt aus der Congruenz der Dreiecke cbg und $f'bg$.

d) Aufgabe. In einem gegebenen Punkte der Hyperbel eine Tangente an dieselbe zu ziehen.

Auflösung (Fig. 12). b sei der gegebene Punkt. Man ziehe einen Leitstrahl fb des Punktes b (in diesem Falle den grösseren Leitstrahl) und schneide auf demselben die Länge $2a$ von f aus ab. Der gefundene Punkt c ist der Gegenpunkt des Brennpunktes f' in Bezug auf die gesuchte Tangente. Diese selbst ist die Halbirungssenkrechte von cf' (§ 6, a und b).

e) Aufgabe. Von einem Punkte ausserhalb der Hyperbel Tangenten an dieselbe zu legen.

Auflösung. Man beschreibe um den gegebenen Punkt m (Fig. 12) einen Kreis, der durch den einen Brennpunkt f' geht. Die Schnittpunkte c und d dieses Kreises und desjenigen, welcher

mit dem Radius $2a$ um f beschrieben ist, sind die Gegenpunkte des Brennpunktes f' in Bezug auf die gesuchten Tangenten. Diese selbst sind die Halbirungssenkrechten der Strecken $f'c$ und $f'd$. Der Beweis wird geführt, wie bei § 3e.

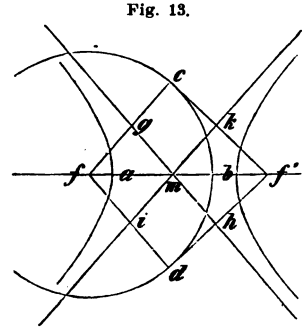
f) Wenn man von einem Brennpunkte einer Hyperbel gerade Linien nach den Berührungspunkten zweier Tangenten und nach ihrem Schnittpunkte zieht, so halbirt die letzte dieser drei Geraden den Winkel der beiden ersten.

Der Beweis ist demjenigen von § 3, f analog.

Die Asymptoten der Hyperbel. § 7.

a) Durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehen zwei Tangenten, welche die Hyperbel in unendlich fernen Punkten berühren, die Asymptoten der Hyperbel.

Fig. 13.



Beweis. Man ziehe um den Brennpunkt f (Fig. 13) mit dem Radius $2a$ einen Kreis und lege von f' die Tangenten $f'c$ und $f'd$ an denselben, c und d sind die Gegenpunkte zweier Tangenten ik und gh (§ 6b), welche durch den Mittelpunkt m gehen (I, § 28c). Da die Radien fc und fd mit den gefundenen Hyperbeltangenten parallel sind, so deuten sie unendlich ferne Berührungspunkte derselben an.

b) Zusatz. Die von einem Brennpunkte der Hyperbel auf eine Asymptote gefällte Senkrechte schneidet von dieser Asymptote ein Stück ab, welches der Hälfte der Hauptaxe gleich ist.

Beweis. Nach I, § 28c ist mk (Fig. 13) die Hälfte von fc, woraus die Behauptung folgt, da $fc = 2a$.

c) Aufgabe. Eine Hyperbel zu zeichnen, wenn ihre Scheitelpunkte und die beiden Asymptoten bekannt sind.

Auflösung (Fig. 13). Man trage auf einer der Asymptoten von dem Mittelpunkte aus nach beiden Seiten die Längen $mk = mi = a$ ab und errichte in den erhaltenen Punkten k und i Senkrechte auf die Asymptote, welche nach b) die Hauptaxe in den beiden Brennpunkten treffen. Sodann verfahre man nach § 4b.

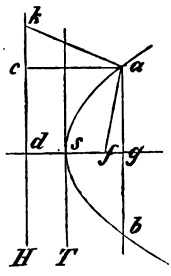
III. Abschnitt.

Die Parabel.

§ 8. Definition der Parabel. — Brennpunkte.

a) Erklärung. Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, welche von einer festen Geraden ebensoweit entfernt sind als von einem festen Punkte.

Fig. 14.



Die feste Gerade (H in Fig. 14) heisst die Leitlinie der Parabel. Der feste Punkt f ist ihr Brennpunkt. Die von einem Parabelpunkt a nach dem Brenpunkte gezogene Strecke af heisst der Leitstrahl des Parabelpunktes. Jeder Punkt der Parabel ist die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks fac, dessen beide Schenkel durch den Leitstrahl und die Entfernung des Parabelpunktes von der Leitlinie gebildet sind. Die von dem Brennpunkte auf die Leitlinie gefällte Senkrechte fd heisst die Axe der Parabel.

b) Aufgabe. Beliebig viele Punkte der Parabel zu construiren, wenn der Brennpunkt und die Leitlinie gegeben sind.

Auflösung. (Fig. 14.) Man ziehe auf der dem Brennpunkte zugekehrten Seite der Leitlinie eine Parallele zu derselben in einer beliebigen Entfernung dg. Mit derselben Entfernung als Radius ziehe man um den Brennpunkt einen Kreis, dessen Schnittpunkte a und b mit jener Parallelen auf der Parabel liegen. Der Abstand ab wird durch die Axe der Parabel senkrecht halbirt. Es ist zu bemerken, dass der Kreis und die Parallele sich nicht treffen, wenn der Abstand der Parallelen von der Leitlinie kleiner ist als der Abstand des Brennpunktes von derselben.

Anmerkung. Man kann die Parabel auf folgende Weise durch stetige Bewegung eines Punktes erzeugen. An dem einen Endpunkte der Hypotenuse eines Winkeldreiecks befestige man einen Faden, welcher der anliegenden Kathete an Länge gleich ist. Das andere Ende des Fadens befestige man in dem Brennpunkte der Parabel. Wenn nun das Winkeldreieck mit der zweiten Kathete an die Leitlinie angelegt und an einem Lineal längs der Leitlinie so lange verschoben wird, bis sich der Faden spannt (akc in Fig. 14 stellt diese Lage des Winkeldreiecks dar), so befindet sich das an dem Winkeldreieck befestigte Ende (a) desselben in einem Parabelpunkte. Man verschiebe nun das Winkeldreieck gegen den Brennpunkt hin und halte den sich lockernden Faden

dadurch gespannt, dass man ihn mit einem Stifte gegen die Kathete (ac) des Winkeldreiecks andrückt. Der an dieser Kathete hingleitende Stift wird dabei einen Bogen der Parabel beschreiben.

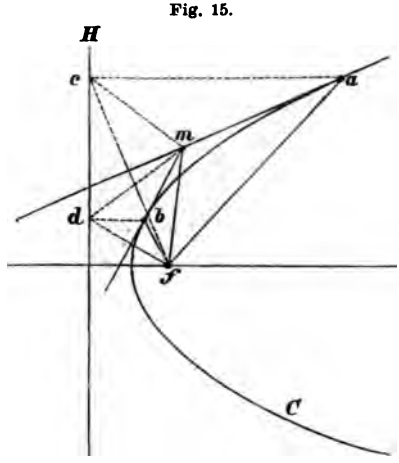
c) Die Punkte der Parabel liegen paarweise symmetrisch gegen die Axe der Parabel. Die Axe trifft die Parabel nur in einem Punkte, dessen Tangente auf der Axe senkrecht steht. — (Scheitelpunkt und Scheiteltangente der Parabel.)

Beweis. (Fig. 14.) Dass dg die Mittelsenkrechte von ab ist, folgt unmittelbar aus der Construction der Parabelpunkte a und b. Derjenige Punkt s der Axe, welcher in der Mitte zwischen dem Brennpunkte der Parabel und der Leitlinie liegt, ist offenbar der einzige Punkt, welchen die Axe mit der Parabel gemein haben kann. Die Scheiteltangente T (Fig. 14) steht senkrecht auf der Axe, denn die bei der Construction der Parabelpunkte erhaltene Sehne ab, welche durch die Axe der Parabel senkrecht halbirt wird, geht in die Scheiteltangente über, sobald der eine Endpunkt dieser Sehne sich dem Scheitelpunkte unbegrenzt nähert.

Tangenten an die Parabel. § 9.

a) Wenn der Gegenpunkt des Brennpunktes in Bezug auf eine Gerade auf der Leitlinie gelegen ist, so wird die Parabel von der Geraden berührt. Der Berührungspunkt liegt auf einer durch den Gegenpunkt mit der Axe parallel gezogenen Geraden.

Fig. 15.



Beweis. (Fig. 15.) Der Punkt c sei auf der Leitlinie H der Parabel gelegen und am sei die Halbirungssenkrechte von fc. ca sei mit der Axe der Parabel parallel, also auf der Leitlinie senkrecht.

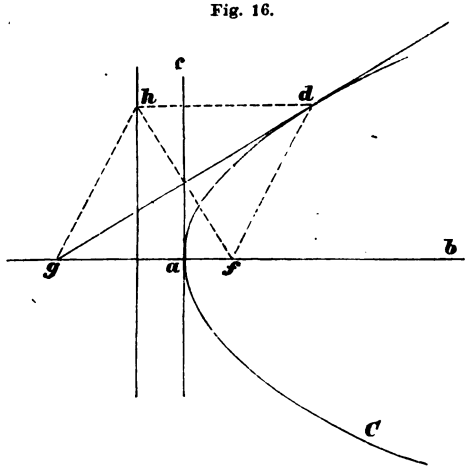
Dann ist (I, § 23a) $ac = af$, das heisst, der Punkt a ist auf der Parabel gelegen. Wäre noch ein anderer Punkt m der Geraden am auf der Parabel gelegen, so müsste die Strecke mc der senkrechten Entfernung des Punktes m von der Leitlinie gleich sein, weil beide, bezüglich nach I, § 23a und der Definition der Parabel der Strecke mf gleich sein würden. Dies widerspricht aber I, § 20b und m

kann folglich kein Punkt der Parabel sein. Die Gerade am hat also den einzigen Punkt a mit der Parabel gemein, das heisst, sie ist die Tangente der Parabel in diesem Punkte.

b) Zusatz. Jeder Punkt der Leitlinie ist Gegenpunkt des Brennpunktes in Bezug auf eine Tangente der Parabel.

c) Diejenigen Winkel, welche die Tangente mit dem Leitstrahle des Berührungspunktes und der Axe der Parabel bildet, sind gleich gross.

Fig. 16.



Beweis. (Fig. 16.) Wenn d der Berührungspunkt der Tangente dg und h der Gegenpunkt von f in Bezug auf dg ist, so ist hd mit der Axe ab parallel (a). Aus der Gleichheit der Winkel hdg und gdf (I, § 18d) und der Gleichheit der Wechselwinkel hdg und dgb (I, § 9α) folgt die Behauptung.

d) Zusatz. Der Berührungspunkt der Tangente und ihr Schnittpunkt mit der Axe bilden mit dem Brennpunkte und seinem Gegenpunkte einen Rhombus. Die Scheiteltangente geht durch den Mittelpunkt desselben.

Beweis. (Fig. 16.) Aus der Gleichheit der Winkel dgf und gdf folgt die Gleichheit der Seiten gf und fd. Da aber fd auch hd gleich und hd mit der Axe parallel ist, so folgt aus I, § 25β, dass $gfdh$ ein Parallelogramm mit gleichen Seiten oder ein Rhombus ist. Die Scheiteltangente ist mit der Leitlinie parallel und halbirt den Abstand des Brennpunktes von derselben. Sie wird daher nach I, § 28c auch die Diagonale hf halbiren, das heisst durch den Mittelpunkt des Rhombus gehen.

e) Aufgabe. In einem Punkte der Parabel die Tangente an dieselbe zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 15.) Man fälle von dem Punkte a, dessen Tangente bestimmt werden soll, eine Senkrechte ac auf die Leitlinie und ziehe den Leitstrahl af. Die Tangente halbirt den gebildeten Winkel caf (c).

f) Aufgabe. Von einem Punkte ausserhalb der Parabel Tangenten an dieselbe zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 15.) m sei der gegebene Punkt. Die Gegenpunkte der gesuchten Tangenten sind die Schnittpunkte c und d der Leitlinie und eines um m mit dem Radius mf beschriebenen Kreises (§ 9, a und b). Die Tangenten selbst sind die Halbirungssenkrechten der Strecken fc und fd.

g) Aufgabe. Eine Parabel zu zeichnen, von welcher der Scheitelpunkt und ein beliebiger anderer Punkt, sowie die Tangenten dieser Punkte gegeben sind.

Auflösung. (Fig. 16.) a sei der Scheitelpunkt und d der zweite gegebene Punkt. ac und dg seien die Tangenten dieser Punkte. Man errichte in dem Schnittpunkt beider Tangenten eine Senkrechte auf dg, so wird dieselbe mit der in a auf der Scheiteltangente errichteten Senkrechten ab den Brennpunkt f bestimmen. Der Gegenpunkt h des Brennpunkts in Bezug auf die Tangente dg ist auf der Leitlinie gelegen. Die Parabel kann nun nach § 8b. construirt werden.

h) Wenn man von dem Brennpunkte einer Parabel gerade Linien nach den Berührungspunkten zweier Tangenten und nach ihrem Schnittpunkte zieht, so halbirt die letzte dieser drei Geraden den Winkel der beiden andern.

Beweis. (Fig. 15.) Nach der Auflösung zu Aufgabe f) ist cmd ein gleichschenkliges Dreieck. Die Winkel acm und bdm sind gleich, weil sie die Winkel an der Grundlinie dieses gleichschenkligen Dreiecks zu 90^0 ergänzen. Da nun aber $\sphericalangle acm = afm$ und $\sphericalangle bdm = bfm$, so müssen auch die Winkel afm und bfm einander gleich sein, was zu beweisen war.

Uebungen. § 10.

1) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt m gehen und einen gegebenen Kreis K berühren, wenn

α) m innerhalb K gelegen ist,

β) m ausserhalb K gelegen ist.

2) Die Brennpunkte und die grosse Axe einer Ellipse (Hyperbel) sind gegeben. Man soll die Schnittpunkte dieser Curve mit einer gegebenen Geraden bestimmen. Zur Auflösung sollen § 10, 1 und I § 91 d.*) verwendet werden.

*) Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch 2 gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt.

3) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt m gehen und eine gegebene Gerade G berühren.

4) Der Brennpunkt und die Leitlinie einer Parabel sind gegeben. Man soll die Schnittpunkte einer gegebenen Geraden mit der Curve finden. Zur Auflösung sollen § 10, 3 und I § 84a*) verwendet werden.

5) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise K und K' ungleichartig berühren, wenn

α) K von K' eingeschlossen wird, ... (Ellipse).
β) K und K' sich schneiden, ... (Ellipse).
γ) K und K' sich ausschliessen ... (Hyperbel).

6) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise K und K' gleichartig berühren, wenn

α) K von K' eingeschlossen wird, ... (Ellipse).
β) K und K' sich schneiden, ... (Hyperbel).
γ) K und K' sich ausschliessen. .... (Hyperbel).

7) Welches ist der geometrische Ort für die Durchschnittspunkte je zweier Radien der Kreise K und K', wenn diese Radien nach Punkten gezogen sind, welche

α) für den innern Aehnlichkeitspunkt von K und K' invers sind (I. § 102c**),

β) für den äussern Aehnlichkeitspunkt von K und K' invers sind.

Andeutung. Diese geometrischen Oerter fallen mit denjenigen von 5) und 6) zusammen.

8) Wo befinden sich die Scheitelpunkte der grossen Axe bei denjenigen Ellipsen oder Hyperbeln, welche die geometrischen Oerter 5), 6), 7) darstellen.

Antwort. In der Mitte zwischen je zwei inversen Punkten der Centralen.

9) Eine Ellipse (Hyperbel) als geometrischen Ort nach 5), 6) oder 7) darzustellen, wenn die Brennpunkte f und f', sowie ein Scheitelpunkt s der grossen Axe gegeben ist.

Andeutung. f und f' müssen die Mittelpunkte von K und K' sein. Ausserdem müssen zwei Punkte der Centralen ff', welche von s gleichweit abstehen, als inverse Punkte von K und K' angenommen werden.

10) Die Aufgabe 9) kann auf beliebig viele Weisen gelöst werden. Man füge desshalb noch die Bedingung hinzu, dass

---

*) Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch 2 gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt.

**) Wenn man durch einen Aehnlichkeitspunkt von K und K' eine Secante dieser Kreise zieht, so werden je zwei nicht homologe Punkte dieser Secante inverse Punkte genannt.

α) K und K' sich berühren.
β) K einen gegebenen Radius hat.
γ) K zu einem Punkte zusammenschrumpft.
(Vergleiche § 10, 1.)

11) Eine Ellipse oder Hyperbel zu construiren, wenn gegeben sind:

α) Die Brennpunkte f und f' und ein Curvenpunkt a (zwei Auflösungen).

β) Ein Brennpunkt f, die Richtung der grossen Axe und zwei Curvenpunkte a und b (zwei Auflösungen).

γ) Ein Brennpunkt f und drei Curvenpunkte a, b, c (vier Auflösungen).

Andeutung. Die Auflösungen geschehen durch 5) und 6). Bei α) ziehe man die Kreise K und K' beide durch a; f und f sind ihre Mittelpunkte. Bei β) ziehe man K und K' durch a; f ist Mittelpunkt von K; K' hat seinen Mittelpunkt auf der grossen Axe und berührt einen leicht zu bestimmenden Kreis (I. § 91 d*). Bei γ) ziehe man beide Kreise durch a; K hat seinen Mittelpunkt in f; K' muss zwei leicht zu findende Kreise berühren (I. § 108, 21**).

12) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche eine gegebene Gerade G und einen gegebenen Kreis K berühren.

Andeutung. Dieser geometrische Ort wird durch zwei Parabeln gebildet.

13) Eine Parabel als geometrischen Ort nach 12) darzustellen, wenn der Brennpunkt und der Scheitelpunkt gegeben sind.

14) Die Aufgabe 13) kann auf beliebig viele Weisen gelöst werden. Man füge desshalb noch die Bedingung hinzu, dass

α) G und K sich berühren,
β) K einen gegebenen Radius hat,
γ) K zu einem Punkt zusammenschrumpft (§ 10, 3).

15) Eine Parabel als geometrischen Ort nach 12) darzustellen, wenn dieselbe durch zwei Punkte a und b eines Kreises K gehen und ihr Brennpunkt in dem Mittelpunkt dieses Kreises liegen soll.

Andeutung. K wird als erzeugender Kreis angenommen. Die Gerade G ist durch die Verbindungslinie ab dargestellt.

16) Eine Parabel zu construiren, wenn gegeben ist:

α) der Brennpunkt f, ein Curvenpunkt und die Axenrichtung (zwei Auflösungen. — § 10 15.),

β) der Brennpunkt f und zwei Curvenpunkte a und b.

---

*) Von den beiden Kreisen, welche durch 2 gegebene Punkte gehen und einen gegebenen Kreis berühren, den einen zu finden, wenn der andere (K) schon bekannt ist.

**) Von den beiden Kreisen, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und zwei gegebene Kreise gleichartig (bezüglich ungleichartig) berühren, den einen zu finden, wenn der andere (K) schon bekannt ist.

Andeutung zu β). Die Auflösung geschieht nach 12). Man ziehe K und G durch den Punkt a; f ist der Mittelpunkt von K; G muss einen leicht anzugebenden Kreis berühren (zwei Auflösungen).

17) Die Mittelsenkrechten derjenigen Secantenabschnitte, welche von einem Punkte m bis zu der Peripherie eines Kreises K reichen, sind Tangenten an eine Curve. Welches ist diese Curve, wenn

α) m ausserhalb K gelegen ist (Hyperbel),

β) m innerhalb K gelegen ist (Ellipse).

18) Bei dem geometrischen Orte in 7) sind die Mittelsenkrechten der zwischen den inversen Punkten enthaltenen Strecken entweder Tangenten oder Normalen der Curvenpunkte.

Anmerkung. Die in einem Curvenpunkte auf die Tangente errichtete Senkrechte heisst die Normale dieses Curvenpunktes.

19) Es gibt unendlich viele Ellipsen und Hyperbeln, welche zwei gegebene Punkte f und f' zu Brennpunkten haben (confocale Curven). Eine beliebige unter den Ellipsen schneidet keine andere Ellipse, aber sie schneidet alle Hyperbeln rechtwinklig. Durch jeden Punkt der Ebene geht eine der Ellipsen und eine der Hyperbeln (§ 10, 11α).

20) Eine Ellipse oder Hyperbel zu construiren, wenn ein Brennpunkt f gegeben ist und

α) drei Tangenten A, B, C der Curve,

β) zwei Tangenten A, B und der Berührungspunkt m auf A,

γ) zwei Curvenpunkte m, n und die Tangente A in m (zwei Auflösungen).

Andeutungen. α) der andere Brennpunkt f' ist der Mittelpunkt des durch die Gegenpunkte von f in Bezug auf A, B und C bestimmten Kreises. β) f' ist der Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch die Gegenpunkte von f in Bezug auf A und B geht. Die Richtung des dem ersteren Gegenpunkte zugehörigen Radius ist durch m bestimmt. γ) f' ist der Mittelpunkt eines Kreises K, welcher durch den Gegenpunkt von f in Bezug auf A geht. Die Richtung des zugehörigen Radius ist durch m bestimmt. K muss ferner einen um n mit dem Radius nf beschriebenen Kreis berühren.

21) An eine Ellipse oder Hyperbel eine Tangente mit einer gegebenen Geraden parallel zu legen (zwei Auflösungen).

22) An diese Curven Tangenten zu ziehen, welche α) einen gegebenen Winkel mit einander bilden, β) senkrecht auf einander stehen.

23) Wenn die Berührungspunkte zweier Tangenten mit einem Brennpunkte in einer Geraden liegen, so steht die Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Schnittpunkte der Tangenten auf der Berührungssehne senkrecht (§ 3 *f*, § 6 *f*, § 9 *h*.)

24) Die Fusspunkte der von einem Brennpunkte einer Ellipse auf die Tangenten gefällten Senkrechten liegen auf einem Kreise.

25) Wenn der Scheitel eines rechten Winkels sich auf einem Kreise bewegt und der eine Schenkel durch einen festen Punkt geht, so berührt der andere Schenkel eine Ellipse oder Hyperbel.

26) Welche Curve wird von den Mittelsenkrechten derjenigen Strecken berührt, welche von einem gegebenen Punkte p bis zu einer gegebenen Geraden G reichen?

27) Eine Parabel zu construiren, wenn der Brennpunkt und α) zwei Tangenten, β) eine Tangente mit ihrem Berührungspunkte gegeben sind.

28) An eine Parabel eine Tangente zu legen, welche mit einer gegebenen Geraden parallel ist.

29) An eine Parabel Tangenten zu legen, welche

α) einen gegebenen Winkel bilden,

β) senkrecht auf einander stehen.

30) Welches ist der geometrische Ort für die Schnittpunkte solcher senkrecht auf einander stehender Tangenten.

31) Die Fusspunkte der von dem Brennpunkte einer Parabel auf die Tangenten gefällten Senkrechten liegen auf einer Geraden.

32) Wenn der Scheitel eines rechten Winkels sich auf einer Geraden bewegt und ein Schenkel durch einen festen Punkt geht, so berührt der andere eine Parabel.

33) Die Berührungssehne der von einem Punkte der Leitlinie gezogenen Tangenten geht durch den Brennpunkt der Parabel.

Zweiter Cursus.

Die Grundgebilde der neueren Geometrie.

I. Abschnitt.

Harmonische Punkte und Strahlen. — Das vollständige Viereck und Vierseit.

Harmonische Punkte und Strahlen. § 11.

a) Erklärung. Vier Punkte a, c, b, d, (Fig. 17) heissen „harmonische Punkte", wenn die Strecke ab in c und d innen und aussen nach demselben Verhältniss getheilt wird.

α) Erklärung. Vier Strahlen A, C, B, D, (Fig. 17) heissen „harmonische Strahlen", wenn sie von demselben Punkte s nach 4 harmonischen Punkten a, c, b, d, gezogen sind.

Anmerkung zu a). Dann wird auch die Strecke cd ihrerseits in a und b innen und aussen nach demselben Verhältniss getheilt (Einleitung § 2 Anmerkung).

Die Punkte a und b, c und d heissen zugeordnete Punkte. Zwei zugeordnete Punkte sind durch einen der übrigen von einander getrennt.

Die Strahlen A und B, C und D heissen zugeordnete Strahlen. Zwei zugeordnete Strahlen sind durch je einen der übrigen von einander getrennt.

Fig. 17.

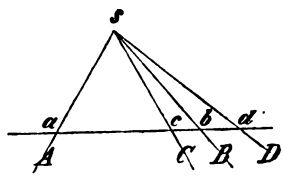
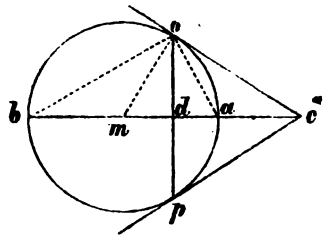


Fig. 18.



1. Beispiel.

b) Die Halbirungslinie eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels theilen die gegenüberliegende Seite harmonisch (Einleitung § 2a und § 11a).

β) Zwei convergente Gerade und die Halbirungslinien der von ihnen gebildeten Winkel bilden 4 harmonische Strahlen (§ 11, b und *α*).

2. Beispiel.

c) Ein Punkt c ausserhalb des Kreises und seine Berührungssehne theilen den durch c gezogenen Durchmesser harmonisch.

Beweis. Man erkennt leicht, dass in dem Dreieck doc der Winkel bei o und sein Nebenwinkel durch die Geraden oa und ob halbirt wird. Die Behauptung folgt also aus *b*).

Anmerkung. Da od die Höhe des rechtwinkligen Dreiecks moc ist, so gilt die Gleichung

$$\overline{mo}^2 = \overline{ma}^2 = \overline{mb}^2 = \overline{mc} \cdot \overline{md}$$

Dieselbe ist auch noch richtig, wenn man die Vorzeichen der Strecken (Einleit. § 1) berücksichtigt, d. h. wenn $acbd$ 4 harmonische Punkte und m die Mitte von ab ist, so gilt die Gleichung $(ma)^2 = (mb)^2 = (mc)\ (md)$. Dieser Satz kann auch umgekehrt werden. Zum Beweise zeichne man unter der Voraussetzung $(ma)^2 = (mb)^2 = (mc)\ (md)$ einen Kreis über ab als Durchmesser, errichte in d die senkrechte Sehne op und ziehe co. Aus der Beziehung $mo^2 = mb^2 = mc \cdot md$ folgt leicht, dass das Dreieck moc bei o rechtwinklig und daher oc eine Tangente des Kreises ist. Die Behauptung ergibt sich also aus c).

§ 12. Fortsetzung.

a) Vier harmonische Punkte einer Geraden g werden aus jedem Punkte, der nicht auf

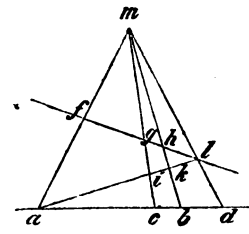
α) Vier harmonische Strahlen eines Punktes m werden von jeder Geraden, welche

$\mathcal{S}$ gelegen ist, durch 4 harmonische Strahlen projicirt.

nicht durch m geht, in 4 harmonischen Punkten geschnitten.

Beweis. Die Behauptung unter a) enthält nur die Erklärung in § 11α. Um α) zu beweisen bedenke man, dass 4 harmonische Strahlen durch Verbindung von 4 harmonischen Punkten a, c, b, d (Fig. 19) mit einem Punkte m entstanden sind. Man hat nun 2 Fälle zu unterscheiden:

Fig. 19.



1. Fall. Die Gerade, welche die 4 harmonischen Strahlen schneidet, geht durch einen der 4 Punkte a, c, b, d, zum Beispiel durch a. Dann können die Geraden mc und md als Transversalen des Dreiecks akb angesehen werden. Daher ist sowohl das Product der Abstandsverhältnisse $mk : mb$, $cb : ca$, $ia : ik$, als auch dasjenige der Abstandsverhältnisse $mk : mb$, $db : da$, $la : lk$ der Einheit gleich (Einleitung §. 3a). Da aber das Verhältniss $mk : mb$ in jedem dieser gleichen Producte den ersten Factor bildet und die zweiten Factoren wegen $cb : ca = db : da$ (§. 11a) gleich sind, so müssen auch die beiden übrigen Factoren, nämlich die Verhältnisse $ia : ik$ und $la : lk$ gleich sein, worin die Behauptung gelegen ist.

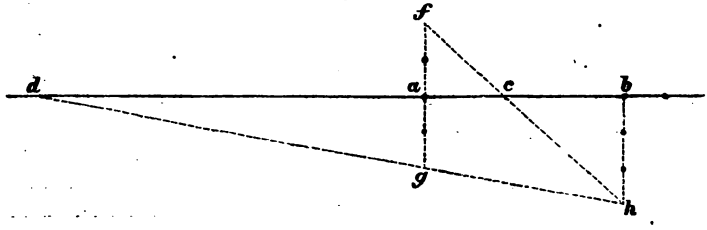
2. Fall. Diejenige Gerade, welche die 4 Strahlen (in den Punkten f, g, h, l) schneidet, geht durch keinen der 4 Punkte a, c, b, d. In diesem Falle verbinde man den einen (l) der 4 Schnittpunkte mit einem (a) der Punkte a, c, b, d. Durch zweimalige Anwendung des ersten Falles erweist sich nun die Behauptung.

b) Aufgabe. Es sind 3 Punkte abc einer Geraden gegeben. Man soll den zu c zugeordneten 4ten harmonischen Punkt finden.

β) Aufgabe. Es sind 3 Strahlen ABC eines Punktes gegeben. Man soll den zu C zugeordneten 4ten harmonischen Strahl finden.

Auflösung. b) Man ziehe durch die Punkte a und b zwei Parallelen (in der Figur 20 sind dieselben senkrecht zu ab) und

Fig. 20.



schneide sie mit einer durch c gezogenen Geraden in f und h. Macht man $ag = af$, so bestimmt die Gerade hg auf ab den gesuchten Punkt d (I, § 63a. II, § 11a).

3) Man schneide die 3 Strahlen durch eine Gerade in drei Punkten a, b, c und suche den zu c zugeordneten 4ten harmonischen Punkt. Derselbe bestimmt den gesuchten Strahl (§ 11α).

c) Es gibt unendlich viele Punktepaare, welche mit den Punkten a und b 4 harmonische Punkte bilden. Dem Mittelpunkte m der Strecke ab gehört der unendlich ferne Punkt der Geraden als vierter harmonischer Punkt zu.

Wenn der Punkt c aus der Mitte vor ab gegen a rückt, so bewegt sich der vierte harmonische Punkt d von links her aus unendlicher Ferne gegen a um zugleich mit c in a einzutreffen.

Wenn sich der Punkt c aus der Mitte von ab gegen b bewegt, so rückt der vierte harmonische Punkt von rechts her aus unendlicher Ferne gegen b um zugleich mit c in b anzukommen.

In a, wie in b, fallen je zwei ugeordnete Punkte in einen einzigen zusammen.

γ) Es gibt unendlich viele Strahlenpaare, welche mit den Strahlen A und B 4 harmonische Strahlen bilden. Der Halbirungslinie M eines von A und B gebildeten Winkels gehört die Halbirungslinie des Nebenwinkels als 4ter harmonischer Strahl zu.

Wenn sich der Strahl C von der Halbirungslinie M weg gegen A dreht, so bewegt sich der 4te harmonische Strahl in entgegengesetzter Drehungsrichtung ebenfalls gegen A um zugleich mit C in A einzutreffen.

Wenn sich der Strahl C von der Halbirungslinie M weg gegen B dreht, so bewegt sich der 4te harmonische Strahl D in entgegengesetzter Drehungsrichtung ebenfalls gegen B um zugleich mit C in B anzukommen.

In A, wie in B, fallen je zwei zugeordnete Strahlen in einen einzigen zusammen.

Der Beweis von c) wird geführt, indem man in Fig. 20 die Länge von bh oder die gemeinsame Länge von af und ag sich verändern lässt und die daraus hervorgehenden Veränderungen in der Lage der Punkte c und d beobachtet. Wenn z. B. $bh = ag = af$, so fällt der Punkt c in die Mitte von ab und der Punkt d ist durch zwei parallele Gerade als unendlich ferner Punkt

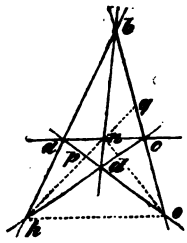
bestimmt. (I, § 10*). Was den Beweis von γ) anbelangt, so ist die zweite Behauptung schon in § 11 β enthalten. Die übrigen ergeben sich leicht aus c) mit Hülfe von § 11 α.

Anmerkung. Aus γ folgt zugleich, dass von allen Strahlenpaaren, welche mit zwei gegebenen Geraden 4 harmonische Strahlen bilden, nur dasjenige einen rechten Winkel einschliesst, dessen Strahlen die Winkel der gegebenen Geraden halbiren.

Das vollständige Viereck und Vierseit. § 13.

a) Erklärungen. Vier Punkte a, b, c, d, (Fig. 21) von welchen nicht 3 auf einer Geraden liegen, können als Ecken eines „vollständigen Vierecks" angesehen werden. Die 6 Geraden ab, bc, cd, da, db, ac, welche diese Punkte paarweise verbinden, sind die Seiten des vollständigen Vierecks.

Fig. 21.

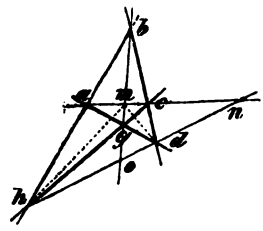


Je zwei Seiten des Vierecks, welche sich nicht in einem Eckpunkte desselben schneiden, wie ad und bc, heissen Gegenseiten. Der Schnittpunkt zweier Gegenseiten heisst ein Nebeneck des vollständigen Vierecks.

Ein vollständiges Viereck hat drei Paare von Gegenseiten und drei Nebenecken.

α) Erklärungen. Vier Gerade ab, bc, cg, ga, (Fig. 22) von welchen nicht 3 durch einen Punkt gehen, können als Seiten eines „vollständigen Vierseits" betrachtet werden. Die 6 Punkte a, b, c, g, d, h, in welchen sich diese Geraden paarweise schneiden, sind die Ecken des vollständigen Vierseits.

Fig. 22.



Je zwei Ecken des Vierseits, deren Verbindungslinie keine Seite desselben ist, wie a und c, heissen Gegenecken. Die Verbindungslinie zweier Gegenecken heisst eine Diagonale des vollständigen Vierseits.

Ein vollständiges Vierseit hat drei Paare von Gegenecken und drei Diagonalen.

*) oder II, § 22a.

b) Auf zwei Gegenseiten (*ad* und *bc* in Fig. 21) eines vollständigen Vierecks entstehen durch das Nebeneck (*o*), in welchem sie sich schneiden, und durch ihre Schnittpunkte mit der Verbindungslinie (*nh*) der übrigen Nebenecken 4 harmonische Punkte.

β) In zwei Gegenpunkten (*h* und *d* in Fig. 22) eines vollständigen Vierseits entstehen durch die Diagonale (*hd*), auf welcher sie liegen, und durch ihre Verbindungslinien mit dem Schnittpunkte (*m*) der übrigen Diagonalen je 4 harmonische Strahlen.

Beweise.

Man denke sich auf jeder der Geraden *ad* und *bc* den zu *o* zugeordneten 4ten harmonischen Punkt bestimmt. Diese Punkte *p* und *q* müssen alsdann beide in denjenigen Strahl des Punktes *m* fallen, welcher mit *mo* zusammen die Winkel der Geraden *ac* und *bd* harmonisch theilt (§. 12a), d. h. *m* muss auf der Geraden *pq* liegen. Ebenso wird bewiesen, dass auch *n* auf der Geraden *pq* gelegen ist, woraus folgt, dass *p* und *q* die Schnittpunkte von *nm* mit den Gegenseiten *ad* und *bc* sind.

Man denke sich in jedem der Punkte *h* und *d* den zu *hd* zugeordneten 4ten harmonischen Strahl bestimmt. Diese beiden Strahlen müssen die Gerade *ac* in dem zu *n* zugeordneten harmonischen Punkte treffen (§ 12α), d. h. sie müssen sich auf der Geraden *ac* schneiden. Ebenso wird bewiesen, dass sich diese Strahlen auch auf der Geraden *gb* treffen, woraus folgt, dass sie die Verbindungslinie der Gegenpunkte *h* und *d* mit dem Schnittpunkte *m* sind.

c) In einem vollständigen Viereck entstehen in jedem Nebeneck durch seine Verbindungslinien mit den übrigen Nebenecken 4 harmonische Strahlen.

γ) In einem vollständigen Vierseit wird jede Diagonale durch die übrigen Diagonalen harmonisch getheilt.

Beweise.

(Fig. 21.) *na*, *nh*, *nd*, *no* sind 4 harmonische Strahlen, weil *a*, *p*, *d*, *o* nach b) 4 harmonische Punkte sind (§ 12a). Ebenso wird die Behauptung für die andern Nebenecken bewiesen.

(Fig. 22.) *a*, *m*, *c*, *n* sind 4 harmonische Punkte, weil *da*, *dm*, *dc*, *dn* nach *β*) 4 harmonische Strahlen sind (§ 12α). Ebenso wird die Behauptung für die andern Diagonalen bewiesen.

d) Aufgabe. Zu drei gegebenen Strahlen eines Punktes

δ) Aufgabe. Zu drei gegebenen Punkten einer Ge-

den 4ten harmonischen Strahl mit dem Lineal allein zu finden. (Durch Anwendung von c.)

raden den 4ten harmonischen Punkt mit dem Lineal allein zu finden. (Durch Anwendung von γ.)

Uebungen. § 14.

1) Wenn man durch einen Eckpunkt eines Dreiecks die Mittellinie und die Parallele zu der gegenüberliegenden Seite zieht, so erhält man 4 harmonische Strahlen.

2) Wenn man vier harmonische Strahlen durch eine Gerade schneidet, welche mit einem derselben parallel ist, so halbirt der zugeordnete Strahl den zwischen den beiden übrigen Strahlen gelegenen Abschnitt.

3) Wenn man durch einen Eckpunkt eines Parallelogrammes die Diagonale und eine Parallele zu der zweiten Diagonalen zieht, so erhält man vier harmonische Strahlen.

4) Es sind drei Strahlen A, B, C gegeben. Man soll zu C den zugehörigen harmonischen Strahl suchen und dazu 3) benützen.

5) Wenn man die Höhen eines Dreiecks zieht und die Fusspunkte derselben durch gerade Linien verbindet, so hat man in jedem dieser Fusspunkte 4 harmonische Strahlen erhalten.

6) Den analogen Satz für die Mittellinien eines Dreiecks (welche sich in dem Schwerpunkte schneiden) auszusprechen und zu beweisen.

7) g, a, d, b seien vier harmonische Punkte. Auf welcher Linie liegen diejenigen Punkte c, welche die Eigenschaft haben, dass

$$\alpha) \sphericalangle acd = bcd$$
$$\beta) \; ca : cb = da : db$$

Antwort zu α) und β). Auf demjenigen Kreise K, welcher den Abstand gd zum Durchmesser hat. Man zeige auch, dass jeder Punkt von K die angegebenen Eigenschaften hat*).

8) Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die beiden Abschnitte gegeben sind, in welche eine Kathete durch die Halbirungslinie des gegenüberliegenden Winkels getheilt wird.

9) Jede auf einem Durchmesser senkrechte Sehne wird durch die Katheten eines über demselben gezeichneten rechtwinkligen Dreiecks harmonisch getheilt.

10) Diejenigen Geraden, welche die Nebenecken eines vollständigen Vierecks verbinden, bestimmen auf den Seiten desselben 6 Punkte, welche die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden.

11) Diejenigen Punkte, in welchen die Diagonalen eines vollständigen Vierseits sich schneiden, liefern durch ihre Verbindung mit den Ecken des Vierseits 6 gerade Linien, welche Seiten eines vollständigen Vierecks sind.

12) Von einem vollständigen Viereck sind die Nebenecken und ein Eckpunkt gegeben. Man soll dasselbe zeichnen.

*) Vergl. I, § 70 a u. α.

13) Von einem vollständigen Vierseit sind die Diagonalen und eine Seite gegeben. Man soll dasselbe zeichnen.

14) Von vier harmonischen Strahlen ist der eine gegeben, sowie die Bedingung, dass die übrigen Strahlen durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte gehen sollen. Man soll die drei fehlenden Strahlen zeichnen.

15) Von vier harmonischen Punkten ist der eine gegeben, sowie die Bedingung, dass die übrigen Punkte auf drei nicht durch einen Punkt gehenden Geraden liegen sollen. Man soll die fehlenden Punkte bestimmen.

16) Auf dem Felde sind zwei Punkte a und b durch Visirstäbe bezeichnet. Obgleich man eines Hindernisses wegen nicht längs der Linie ab visiren kann, so soll dennoch mit alleiniger Hülfe von Visirstäben der Schnittpunkt der Geraden ab mit einer andern ausgesteckten Geraden G bestimmt werden.

Andeutung. Man stecke ein vollständiges Vierseit ab, von welchem a und b zwei Gegenpunkte sind, während ein zweites Paar von Gegenpunkten beliebig auf G angenommen wird. Nach § 13γ wird nun die Aufgabe durch das Aufsuchen eines vierten harmonischen Punktes auf der dritten Diagonalen des Vierseits zu lösen sein.

17) Von einem gegebenen Punkte m aus eine Gerade nach dem unzugänglichen Convergenzpunkt zweier gegebener Geraden zu ziehen.

II. Abschnitt.

Projectivische Grundgebilde.

§ 15. Punktreihen und Strahlenbüschel.

a) Erklärung. Es gibt unendlich viele Punkte, welche auf einer Geraden G liegen. Die Gesammtheit derselben wird eine Punktreihe genannt. Die Gerade G heisst der Träger der Punktreihe.

α) Erklärung. Es gibt unendlich viele Geraden, welche durch einen Punkt m gehen. Die Gesammtheit derselben wird ein Strahlenbüschel genannt. Der Punkt m heisst der Scheitel des Strahlenbüschels.

Die Punktreihe und der Strahlenbüschel heissen die Grundgebilde der neueren Geometrie, weil man sich derselben zu der Erzeugung oder der Definition von zusammengesetzteren Figuren bedient.

Die Punkte der Punktreihe oder die Strahlen des Strahlenbüschels werden als Elemente dieser Gebilde bezeichnet.

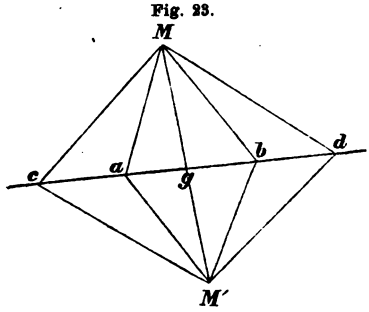
Um aus zwei Grundgebilden neue Figuren entstehen zu lassen, ist es nöthig, dieselben so auf einander zu beziehen, dass jedem

Elemente des einen Grundgebildes ein einziges Element des andern entspricht.

Solche „eindeutige Beziehungen" von Grundgebilden auf einander können in folgender Art aufgestellt werden.

b) Man verbinde die Punkte $a, b, c, d \ldots$ einer Punktreihe (Fig. 23) mit einem ausserhalb des Trägers gelegenen Punkte

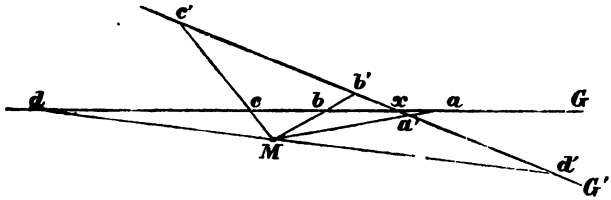
Fig. 23.



M und setze jeden Punkt der Reihe dem durch ihn gezogenen Strahle des entstandenen Strahlenbüschels $M(a,b,c,d\ldots)$ entsprechend.

c) Man verbinde jeden Punkt $a, b, c, d \ldots$ (Fig. 23) einer Punktreihe mit zwei ausserhalb

Fig. 24.



des Trägers gelegenen Punkten M und M' und setze in den entstandenen Strahlenbüscheln je zwei Strahlen entsprechend, welche sich in einem Punkte der Punktreihe schneiden.

β) Man schneide die Strahlen eines Strahlenbüschels durch eine Gerade, welche nicht durch den Scheitel geht und setze jeden Strahl des Büschels dem auf ihm gelegenen Punkte der entstandenen Punktreihe entsprechend.

γ) Man schneide die Strahlen eines Strahlenbüschels (Fig. 24) mit zwei Geraden G und G', welche nicht durch den Scheitel gehen und setze in den entstandenen Punktreihen je zwei Punkte entsprechend, welche auf demselben Strahle des Büschels liegen.

In allen diesen Fällen entsprechen 4 harmonischen Elementen des einen Gebildes wieder 4 harmonische Elemente des andern, wie sich leicht durch § 12, a und α beweisen lässt.

§ 16. Projectivische Grundgebilde.

Zwei Grundgebilde heissen zu einander projectivisch verwandt, oder kurz projectivisch, wenn sie eindeutig so auf einander bezogen sind, dass je 4 harmonischen Elementen des einen wieder 4 harmonische Elemente des andern entsprechen. Die in § 15. festgesetzten Beziehungen lassen sich also folgendermassen ausdrücken:

a) Eine Punktreihe wird aus jedem Punkte ausserhalb ihres Trägers durch einen mit ihr projectivischen Strahlenbüschel projicirt. Jeder Strahl geht durch den ihm entsprechenden Punkt.

α) Ein Strahlenbüschel wird durch jede Gerade, welche nicht durch seinen Scheitel geht, in einer mit ihm projectivischen Punktreihe geschnitten. Jeder Punkt liegt auf dem ihm entsprechenden Strahle.

Diese Lage der beiden Gebilde gegen einander heisst die perspectivische Lage.

b) Eine Punktreihe wird aus zwei nicht auf ihrem Träger gelegenen Punkten durch zwei projectivische Strahlenbüschel projicirt. Je zwei entsprechende Strahlen schneiden sich auf dem Träger der Punktreihe.

In der Verbindungslinie der Scheitel sind zwei entsprechende Strahlen vereinigt.

Diese Lage zweier projectivischer Strahlenbüschel heisst die perspectivische.

β) Ein Strahlenbüschel wird durch zwei Gerade, welche nicht durch den Scheitel gehen, in zwei projectivischen Punktreihen geschnitten. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte (Projectionsstrahlen) gehen alle durch den Scheitel des Büschels. In dem Schnittpunkte der Träger sind zwei entsprechende Punkte vereinigt.

Diese Lage zweier projectivischer Punktreihen heisst die perspectivische.

§ 17. Aufgaben.

a) Eine Punktreihe und einen Strahlenbüschel projectivisch auf einander zu beziehen, so dass drei gegebene Punkte a, b, c (Fig. 25) der Punktreihe den gegebenen Strahlen α, β, γ (Fig. 26) des Büschels entsprechen.

Auflösung. Man denke sich den Strahlenbüschel so verschoben, dass die Strahlen α, β, γ bezüglich durch die Punkte a, b, c gehen. Die neue Lage des Büschels findet man dadurch, das man durch a und b einen Kreis zieht, welcher über ab als

Fig. 25.

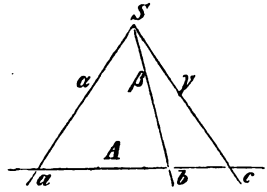
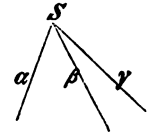


Fig. 26.



Sehne den Winkel der Strahlen α und β als Peripheriewinkel fasst, und durch b und c einen Kreis, dessen Peripheriewinkel über bc dem Winkel der Strahlen β und γ gleich ist. Die beiden Kreise schneiden sich in b und zum zweiten Male in dem gesuchten Orte des Scheitels S. Nun setze man jeden Strahl des Büschels seinem Schnittpunkt mit dem Träger der Punktreihe entsprechend.

b) Zwei Strahlenbüschel projectivisch so auf einander zu beziehen, dass drei gegebenen Strahlen des einen der Reihe nach drei gegebene Strahlen des andern entsprechen.

Auflösung.

Man lege die Strahlenbüschel so, dass zwei entsprechende Strahlen in die Verbindungslinie MM' (Fig. 23) der Scheitel fallen.

Die beiden andern Paare entsprechendender Strahlen bestimmen zwei Schnittpunkte a und b. Man setze nun je zwei Strahlen beider Büschel entsprechend, welche sich in einem Punkte der Geraden ab schneiden.

β) Zwei Punktreihen projectivisch so auf einander zu beziehen, dass drei gegebenen Punkten der einen der Reihe nach drei gegebene Punkte der andern entsprechen.

Auflösung.

Man lege die Punktreihen so, dass zwei entsprechende Punkte in den Schnittpunkt x (Fig. 24) der Träger fallen.

Die beiden andern Paare entsprechender Punkte bestimmen zwei Gerade aa' und bb' und ihren Schnittpunkt M.

Man setze nun je zwei Punkte beider Reihen entsprechend, welche auf einer durch M gehenden Geraden liegen.

Allgemeine Sätze über projectivische Gebilde. § 18.

a) Wenn zwei Grundgebilde mit demselben dritten projectivisch sind, so sind sie auch unter sich projectivisch.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Definition der projectivischen Gebilde.

b) Wenn drei Elemente eines Grundgebildes mit den entsprechenden Elementen eines damit projectivischen gleichartigen Grundgebildes zusammenfallen, so fallen je zwei entsprechende Elemente der beiden Gebilde zusammen.

Beweis. 1) a, b, c seien drei Punkte einer Geraden, in welchen je zwei entsprechende Punkte zweier auf dieser Geraden gelegenen projectivischen Punktreihen zusammenfallen. Man kann nun drei andere Punkte finden, von welchen jeder mit a, b, c eine Gruppe von vier harmonischen Punkten bildet, so nämlich, dass nach einander jeder der Punkte a, b, c einem der drei neuen Punkte zugeordnet ist. Diese drei gefundenen Punkte müssen nach der Definition projectivischer Gebilde (§ 16.) mit ihren entsprechenden Punkten zusammenfallen. Aus den nunmehr vorhandenen 6 Punkten kann man wieder andere Gruppen von drei Punkten bilden, von welchen jede auf dieselbe Weise zu drei Punkten führt, welche ebenfalls mit ihren entsprechenden Punkten zusammenfallen.

In derselben Weise fortschliessend findet man, dass auf der gegebenen Geraden eine unendliche Zahl von Punkten existiren müsse, in welchen entsprechende Punkte beider Reihen zusammenfallen. Es bleibt nur noch zu beweisen, dass die sich selbst entsprechenden Punkte der Geraden in stetiger Weise der ganzen Ausdehnung der Geraden nach auf einander folgen.

Seien m und n zwei sich selbst entsprechende Punkte der Geraden. Zu jedem Punkt innerhalb der Strecke mn, welcher mit seinem entsprechenden zusammenfällt, existirt ein zugehöriger vierter harmonischer Punkt ausserhalb mn, welcher ebenfalls sich selbst entspricht. Umgekehrt gehört zu jedem sich selbst entsprechenden Punkt ausserhalb mn ein eben solcher innerhalb dieser Strecke, nämlich der zugehörige vierte harmonische Punkt. Enthielte nun eine Strecke, wie klein dieselbe auch sein mag, keine sich selbst entsprechenden Punkte, so könnten auch keine solche ausserhalb mn liegen, was nicht möglich ist, da dem Vorigen zufolge unendlich viele Punkte der Geraden mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Wenn aber keine noch so kleine Strecke, welche zwischen zwei sich selbst entsprechenden Punkten liegt, von weitern Punkten dieser Art frei sein kann, so müssen diese Punkte in stetiger Weise auf einander folgen, was zu beweisen war.

2) Es seien zwei projectivische und concentrische Strahlbüschel gegeben, in welchen drei Strahlen A, B, C sich selbst

entsprechen. Die beiden Strahlbüschel projiciren sich auf einer Geraden G, welche nicht durch ihren Scheitel geht, in zwei projectivischen Punktreihen. Die Schnittpunkte a, b, c der Strahlen A, B, C mit der Geraden G entsprechen in diesen Punktreihen sich selbst. Wenn nun in den gegebenen Strahlenbüscheln nicht alle Strahlen mit ihren entsprechenden Strahlen zusammenfielen, so könnten auch in den projectivischen Punktreihen, in welchen die Punkte a, b, c sich selbst entsprechen, nicht alle Punkte mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Dies widerspricht aber dem unter 1) bewiesenen ersten Theile des Lehrsatzes.

c) Zwei Grundgebilde können auf eine einzige Art projectivisch so auf einander bezogen werden, dass drei Elementen a, b, c des einen der Reihe nach drei Elemente a', b', c' des andern entsprechen.

Beweis. Im andern Falle würden zwei projectivische Gebilde entstehen, welche drei Elemente a', b', c' entsprechend gemein haben, ohne dass jedes Element mit seinem entsprechenden zusammenfällt, was nach b) unmöglich ist.

Anmerkung. Die Art, in welcher diese einzig mögliche Beziehung bewerkstelligt wird, ist in § 17, a, b, und β auseinandergesetzt.

Bedingungen für die perspectivische Lage der Grundgebilde. § 19.

a) Eine Punktreihe und ein mit ihr projectivischer Strahlenbüschel liegen perspectivisch, wenn drei Punkte der ersteren auf den entsprechenden Strahlen des letzteren liegen.

b) Zwei projectivische Strahlenbüschel liegen perspectivisch, wenn drei Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einer Geraden liegen.

β) Zwei projectivische Punktreihen liegen perspectivisch, wenn drei Projectionsstrahlen durch einen Punkt gehen.

Die Beweise von a), b), β) folgen unmittelbar aus § 17. mit Anwendung von § 18c.

Von dem Sinne der Grundgebilde. § 20.

a) Wenn zwei bewegte Punkte gleichzeitig die Orte entsprechender Punkte in zwei projectivischen Punktreihen durchlaufen, so behält der eine

α) Wenn zwei bewegte Strahlen gleichzeitig die Lagen entsprechender Strahlen in zwei projectivischen Strahlenbüscheln durchlaufen, so behält

dieser Punkte die eingeschlagene Bewegungsrichtung bei, so lange dies der andere thut.

Man beweist diese Behauptung, indem man die beiden Reihen in perspectivische Lage bringt und beachtet, dass die bewegten Strahlen jederzeit die Durchschnittspunkte beider Träger mit einem um das Projectionscentrum sich drehenden Strahle sind. Die beiden Punkte können also ihre Bewegungsrichtung nur gleichzeitig ändern, wenn der sich drehende Strahl den Sinn seiner Drehung wechselt.

b) Wenn zwei bewegte Punkte in projectivischen Punktreihen auf zusammenfallenden oder parallelen Trägern gleichzeitig die Orte entsprechender Punkte durchlaufen, so sind die Richtungen, nach welchen sich die beiden Punkte bewegen, entweder jederzeit übereinstimmend oder jederzeit entgegengesetzt (a). Im ersten Falle heissen die Punktreihen gleichlaufend, im zweiten ungleichlaufend.

der eine Strahl den Sinn seiner Drehung bei, so lange dies der andere thut.

Man beweist diese Behauptung, indem man die beiden Büschel in perspectivische Lage bringt und beachtet, dass die bewegten Strahlen jederzeit die Projectionsstrahlen eines auf dem perspectivischen Durchschnitt sich bewegenden Punktes sind. Die beiden Strahlen können also nur gleichzeitig den Sinn ihrer Drehung ändern, wenn der sich bewegende Punkt seine Bewegungsrichtung ändert.

β) Wenn zwei bewegte Strahlen in projectivischen Strahlenbüscheln gleichzeitig die Orte entsprechender Strahlen durchlaufen, so sind die Drehungsrichtungen, nach welchen sich die beiden Strahlen bewegen, entweder jederzeit übereinstimmend oder jederzeit entgegengesetzt (*α*). Im ersten Falle heissen die Strahlenbüschel gleichlaufend, im zweiten Falle ungleichlaufend.

§ 21. Der Kreis und die projectivischen Grundgebilde.

a) Die Punkte eines Kreises werden aus zwei beliebigen unter ihnen durch zwei congruente und gleichlaufende Strahlenbüschel projicirt.

α) Die Tangenten eines Kreises schneiden zwei beliebige derselben in zwei projectivischen Punktreihen.

Beweis. *a)* Wenn A und C zwei beliebige Punkte des Kreises sind, so sind die Winkel AsC und $As'C$ als Peripheriewinkel über demselben Bogen entweder gleich (wie in der Figur) oder der eine ist dem Nebenwinkel des andern gleich (wenn die Punkte

A und C durch die Punkte s und s' getrennt sind). In jedem Falle bilden die Strahlen sa und sc des Büschels s einerseits und die Strahlen $s'a'$ und $s'c'$ des Büschels s' andererseits gleiche Winkel von gleichem Sinne, worin der Beweis gelegen ist.

Fig. 27.

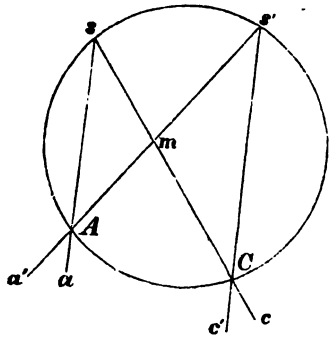
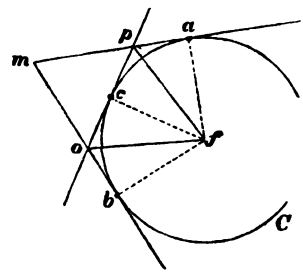


Fig. 28.



α) Wenn die Tangenten ma und mb an die Punkte a und b des Kreises C von einer dritten Tangente an den Punkt c in o und p geschnitten werden, so ist leicht zu zeigen, dass der Winkel pfo entweder gleich der Hälfte des concaven Winkels afb (wie in der Figur) oder gleich $180^0 - \frac{afb}{2}$ ist (wenn die Punkte m und c auf verschiedenen Seiten der Sehne ab liegen). Wenn also c sich auf dem Kreise bewegt, so bleibt der von den Strahlen pf und fo eingeschlossene Winkel gleich, d. h. diese Strahlen beschreiben zwei congruente Strahlenbüschel und folglich (§ 16α) die Punkte p und o projectivische Punktreihen.

Anmerkung. Der Satz a) kann auch umgekehrt werden: Entsprechende Strahlen zweier congruenter und gleichlaufender Strahlenbüschel schneiden sich auf einem Kreise, welcher durch die Scheitel der Büschel geht.

III. Abschnitt.

Projectivische Grundgebilde. (Fortsetzung.)

Unendlich ferne Punkte. § 22.

a) Parallele Geraden können als Linien angesehen werden, welche einen unendlich fernen Punkt mit einander gemein haben und umgekehrt.

Eine Gerade hat nur einen einzigen unendlich fernen Punkt.

Beweis. Wenn man die eine von zwei convergenten Geraden festhält und die andere um einen ihrer Punkte m dreht, so tritt der Parallelismus ein, wenn der Schnittpunkt der Geraden nach der einen oder andern Seite in unendliche Ferne gerückt ist und die letztern beiden Lagen sind von der parallelen Lage unendlich wenig verschieden, womit der Sinn der ersten Behauptung in a) ausgesprochen ist. Die nach entgegengesetzten Richtungen einer Geraden liegenden unendlich fernen Punkte werden nicht unterschieden, weil sonst jede Parallele mit der gegebenen Geraden zwei Punkte gemein hätte ohne mit ihr zusammen zu fallen.

b) Eine Schaar von unter sich parallelen Linien kann als ein Strahlenbüschel angesehen werden, dessen Scheitel ein unendlich ferner Punkt der Ebene ist.

Beweis. Wenn man die Strahlen eines Strahlenbüschels um die Punkte einer Punktreihe drehbar denkt und der Scheitel des Büschels auf einem seiner Strahlen in unendliche Ferne rückt, so werden die Strahlen des Büschels sich der parallelen Lage unbegrenzt nähern.

c) Wenn man in zwei Strahlenbüscheln, deren Scheitel nicht zusammenfallen, die parallelen Strahlen entsprechend setzt, so sind die Strahlenbüschel congruent und können als projectivische Strahlenbüschel in perspectivischer Lage betrachtet werden, deren perspectivischer Durchschnitt eine unendlich ferne Gerade ist.

Beweis. Die Congruenz der Strahlenbüschel erweist sich durch die Gleichheit entsprechender Winkel. Was die zweite Behauptung betrifft, so denke man sich die Strahlen zweier perspectivisch gelegener Strahlenbüschel um ihre Scheitel drehbar, während der perspectivische Durchschnitt sich parallel mit seiner ersten Lage entfernt. Wenn die Entfernung des perspectivischen Durchschnitts von den Scheiteln der Büschel bis ins Unbegrenzte wächst, so gehen die entsprechenden Strahlen der Büschel in die parallele Lage über, worin der Beweis gelegen ist.

d) Die unendlich fernen Punkte einer Ebene können als Punkte einer Geraden angesehen werden.

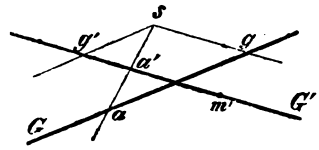
Beweis. Da in den beiden congruenten Strahlenbüscheln, welche in c) besprochen sind, parallele Strahlen von allen möglichen Richtungen vorhanden sind, so enthält der perspectivische Durchschnitt derselben auch alle unendlich fernen Punkte der Ebene.

Die Gegenpunkte projectivischer Punktreihen. § 23.

a) Aufgabe. Es seien zwei projectivische Punktreihen G und G' gegeben. Man soll in jeder Reihe denjenigen Punkt suchen, welcher dem unendlich fernen Punkt der andern Reihe entspricht.

Auflösung. Man bringe die Reihen in perspectivische Lage (Fig. 29). Zwei durch das Projectionscentrum zu den Trägern gezogene Parallelen bestimmen auf diesen Trägern die gesuchten Punkte g und g' der Reihen.

Fig. 29.



b) Erklärung. In jeder von zwei projectivischen Punktreihen heisst derjenige Punkt der Gegenpunkt der Reihe, welcher dem unendlich fernen Punkt der andern Reihe entspricht.

Anmerkung. Wenn die unendlich fernen Punkte sich selbst entsprechen, so fallen diese Gegenpunkte mit den unendlich fernen Punkten zusammen, von welchem Falle der folgende Paragraph handelt.

Aehnliche Punktreihen. § 24.

Erklärung. Zwei Punktreihen heissen ähnlich, wenn ihre Punkte sich paarweise so entsprechen, dass zwei Strecken der einen Reihe sich wie die entsprechenden Strecken der andern verhalten.

a) Aehnliche Punktreihen sind projectivisch. Die unendlich fernen Punkte der Träger entsprechen sich in beiden Reihen.

α) Projectivische Punktreihen, deren unendlich ferne Punkte sich entsprechen, sind ähnlich.

Beweis. a). Wenn man die Träger ähnlicher Punktreihen in parallele Lage bringt, so gehen die Projectionsstrahlen durch einen Punkt (Einleitung § 3β), worin der Beweis gelegen ist (§ 15β).

α). Wenn man die Träger beider Punktreihen in parallele Lage bringt, so liegen die Punktreihen perspectivisch (§ 19β), das heisst, die Projectionsstrahlen gehen durch einen Punkt, woraus die Behauptung folgt (Einleitung § 3b).

Anmerkung. Da in ähnlichen Punktreihen die unendlich fernen Punkte sich entsprechen, so sind diese Reihen durch zwei weitere Paare entsprechender Punkte bestimmt (§ 18c).

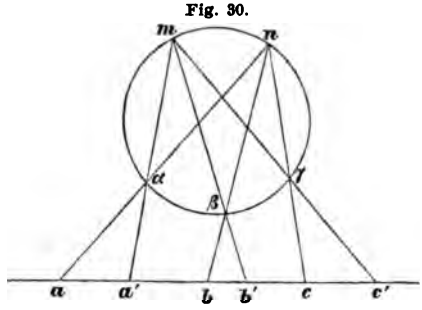
§ 25. Aufgaben.

a) Aufgabe. Eine Gerade sei der Träger zweier projectivischer Punktreihen. Man soll diejenigen Punkte der Geraden finden, welche in beiden Punktreihen sich selbst entsprechen.

α) Aufgabe. Ein Punkt sei der Scheitel zweier projectivischer Strahlenbüschel. Man soll diejenigen Strahlen des Punktes finden, welche in beiden Büscheln sich selbst entsprechen.

Auflösung a) Man projicire die eine Punktreihe $a, b, c \ldots$ aus einem beliebigen Punkte m durch einen Strahlenbüschel.

Fig. 30.



Einen andern Strahlenbüschel, der mit diesem congruent und gleichlaufend ist, bringe man mit der andern Punktreihe $a', b', c' \ldots$ in perspectivische Lage (siehe die Auflösung von § 17a). Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen dieser Büschel liegen auf einem Kreise (§ 21 Anmerkung). Wenn dieser Kreis den Träger der Punktreihen in zwei Punkten schneidet, so sind dieselben sich selbst entsprechende Punkte der beiden Reihen.

Da die congruenten Strahlenbüschel der Construction zufolge gleichlaufend sind, so müssen die Scheitel m und n der Büschel auf die gleiche Seite (Fig. 30) oder auf verschiedene Seiten des Trägers fallen, je nachdem die beiden Punktreihen gleichlaufend oder ungleichlaufend sind. In dem zweiten Falle schneidet der Kreis die Gerade A nothwendig in zwei Punkten. In dem ersten Falle kann der Kreis die Gerade ebenfalls in zwei Punkten schneiden oder berühren oder gar nicht treffen, wie in der Figur.

α) Die gegebenen projectivischen Strahlenbüschel projiciren sich auf einer Geraden, welche nicht durch ihren gemeinsamen Scheitel geht, als zwei projectivische Punktreihen. Diejenigen Punkte der Geraden, welche sich in beiden Reihen selbst entsprechen (a), werden aus dem gemeinsamen Scheitel der Strahlenbüschel durch die gesuchten Strahlen projicirt.

b) Aufgabe. Es sind zwei projectivische Strahlenbüschel gegeben. Man soll zwei zu einander senkrechte Strahlen des einen Büschels finden, welchen wiederum zwei zu einander senkrechte Strahlen des andern entsprechen.

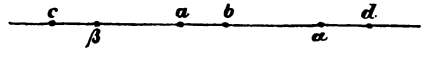
Auflösung. Man bringe die beiden Büschel in perspectivische Lage. Wenn der perspectivische Durchschnitt auf der Verbindungslinie der beiden Scheitel senkrecht steht, so stellt die letztere Gerade einen gemeinsamen Schenkel der sich entsprechenden rechten Winkel dar. Die beiden andern Schenkel laufen mit dem perspectivischen Durchschnitt parallel. In jedem andern Falle halbire man den Abstand der Scheitel durch eine Senkrechte. Dieselbe trifft den perspectivischen Durchschnitt in dem Mittelpunkte eines Kreises, welcher durch die beiden Scheitel geht und den pespectivischen Durchschnitt in zwei Punkten trifft. Diese Punkte werden aus jedem der Scheitel durch einen rechten Winkel projicirt und die Schenkel des einen dieser Winkel entsprechen den Schenkeln des andern.

Es geht hieraus zugleich hervor, dass kein anderes Paar entsprechender rechter Winkel existirt, wenn die Strahlenbüschel nicht congruent sind.

c) Aufgabe. Man soll einen Punkt finden, aus welchem zwei projectivische Punktreihen desselben Trägers durch congruente Strahlenbüschel projicirt werden.

Auflösung. (Fig 31.) Der Punkt c in der ersten Reihe entspreche dem Punkte a der zweiten; der Punkt a in der ersten Reihe entspreche dem Punkte b der zweiten und der Punkt b in der ersten Reihe entspreche dem Punkte d der zweiten.

Fig. 31.



Man suche zu c, a, b den vierten harmonischen Punkt α, welcher a zugeordnet ist und zu a, b, d den vierten harmonischen Punkt β, welcher b zugeordnet ist. Wenn die über den Strecken $a\alpha$ und $b\beta$ als Durchmessern gezeichneten Kreise sich in zwei Punkten m und n schneiden, so hat jeder dieser Punkte die Eigenschaft, dass von ihm aus die Strecken ca, ab, bd unter gleichen Winkeln gesehen werden (I, § 70b*). Jeder der Punkte m und n genügt nun der Aufgabe, denn die Figur der 3 Strahlen mc, ma, mb des einen Büschels ist der Figur der entsprechenden Strahlen ma, mb, md des andern Büschels congruent und durch diese 3 Paare entsprechender

*) Man kann dies auch leicht durch II, § 13, 7 beweisen.

Strahlen sind die beiden projectivischen Strahlenbüschel als congruent bestimmt. Es ist wichtig zu bemerken, dass die Punkte m und n immer existiren, wenn die gegebenen Punktreihen gleichlaufend sind und keine sich selbst entsprechenden Punkte enthalten. In diesem Falle denke man sich a und b in Fig. 31 als diejenigen entsprechenden Punkte beider Reihen, welche einander am nächsten liegen. Die Strecken ac und bd müssen den gemachten Voraussetzungen zufolge entgegengesetzte Richtung haben und die Strecke ab an Grösse übertreffen. Man folgert alsdann nach § 12c, dass α und β auf verschiedenen Seiten der Strecke ab liegen und die beiden Kreise sich schneiden müssen.

§ 26. Uebungen.

1) Zwei projectivische Punktreihen in perspectivischer Lage werden aus einem Punkte m durch zwei projectivische Strahlenbüschel S und S' projicirt. Man soll zwei sich selbst entsprechende Strahlen von S und S' angeben.

Andeutung. Die Verbindungslinien von m mit dem Schnittpunkt der Träger und dem Projectionscentrum.

2) Zwei projectivische Strahlenbüschel in perspectivischer Lage werden durch eine Gerade geschnitten. Man soll in den projectivischen Punktreihen, welche auf dieser Geraden entstehen, zwei sich selbst entsprechende Punkte angeben.

Andeutung. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem perspectivischen Durchschnitt und der Verbindungslinie beider Scheitel.

3) Eine Figur zu zeichnen, welche zwei Punktreihen darstellt, die nicht unter sich, aber mit derselben dritten Punktreihe perspectivisch liegen. Gibt es eine Gerade, welche die 3 Träger in entsprechenden Punkten schneidet?

4) Eine Figur zu zeichnen, welche zwei Strahlenbüschel darstellt, die nicht unter sich aber mit demselben dritten Strahlenbüschel perspectivisch sind. Gibt es einen Punkt, in welchem sich 3 entsprechende Strahlen schneiden?

5) Auf zwei convergenten Geraden seien zwei perspectivische Punktreihen durch zwei Projectionsstrahlen bestimmt. Man soll α) zu einem Punkte m der einen Reihe den entsprechenden finden, β) diejenigen Punkte bestimmen, welche durch Drehung der Träger um ihren Schnittpunkt zum Zusammenfallen gebracht werden können. (Bei β) ist der Gebrauch des Zirkels erlaubt.)

6) Zwei projectivische Punktreihen desselben Trägers sind durch einen sich selbst entsprechenden Punkt und zwei Paare a, a' und b, b' entsprechender Punkte bestimmt. Man soll α) zu einem Punkte c der einen Reihe den entsprechenden finden, β) den zweiten sich selbst entsprechenden Punkt bestimmen.

Die Auflösung geschieht durch 2) oder 3) mit dem Lineale allein.

7) Die entsprechende Aufgabe für zwei concentrische Strahlenbüschel zu stellen und durch 1) oder 4) zu lösen.

8) Zwei projectivische Punktreihen desselben Trägers sind durch die sich selbst entsprechenden Punkte m und n und ein Paar $a\,a'$ entsprechender Punkte bestimmt. Man soll mit Hülfe von 2) oder 3) zu einem Punkte b der einen Reihe den entsprechenden finden.

9) Die dualistisch entsprechende Aufgabe zu stellen und durch 1) oder 4) zu lösen.

10) abc und $a'b'c'$ seien zwei Dreiecke, deren Ecken und Seiten sich paarweise entsprechen. Man beweise die beiden Sätze:

α) Wenn die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden liegen, so gehen die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch einen Punkt.

β) Wenn die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch einen Punkt gehen, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden.

Anleitung zum Beweis von α). m, n, r seien die auf einer Geraden G gelegenen Punkte, in welchen sich bezüglich die Seiten ab und $a'b'$, bc und $b'c'$, ca und $c'a'$ schneiden. Bezeichnet man die Schnittpunkte der Geraden cc' mit ab und $a'b'$ bezüglich durch k und k', so sind die Strahlenbüschel $c\,(m, a, k, b)$ und $c'\,(m, a', k', b')$ projectivisch und in perspectivischer Lage (G ist ihr perspectivischer Durchschnitt). Die Punktreihen $m, a, k, b \ldots$ und $m, a', k', b' \ldots$ sind daher auch projectivisch und überdies in perspectivischer Lage, woraus folgt, dass die Projectionsstrahlen aa', bb' und cc' (oder kk') durch einen Punkt gehen. Der Beweis von β) wird analog geführt.

11) Wenn jede der geraden Linien $A, B, C \ldots M$ sich um einen festen Punkt so dreht, dass der Schnittpunkt von je zwei auf einander folgenden Geraden sich auf einer festen Geraden bewegt, (eine Punktreihe beschreibt) so beschreiben die erste und die letzte Gerade (A und M) projectivische Strahlenbüschel (§ 18a).

12) Wenn jeder der Punkte $a, b, c \ldots m$ sich auf einer Geraden so bewegt, dass die Verbindungslinie von je zwei aufeinander folgenden Punkten sich um einen festen Punkt dreht (einen Strahlenbüschel beschreibt), so beschreiben der erste und letzte Punkt (a und m) zwei projectivische Punktreihen.

13) Wenn die Seiten A, B, C eines Dreiecks sich so bewegen, dass dieses Dreieck immer einem andern Dreieck $\triangle$ umbeschrieben ist und zugleich zwei seiner Ecken (AB) und (BC) sich auf Seiten eines weiteren Dreiecks $\triangle'$ bewegen, so bestimmen die sich bewegenden Seiten A und C auf der dritten Seite von $\triangle'$ zwei projectivische Punktreihen.

14) Zwei Dreiecke abc und $a'b'c'$ sind gegeben. Man soll ein drittes Dreieck finden, welches dem ersten umbeschrieben und dem zweiten einbeschrieben ist (Aufgabe 13).

15) Zwei projectivische Punktreihen sind gegeben. Man soll diejenigen Projectionsstrahlen finden, welche durch einen gegebenen Punkt m gehen (§ 25α).

16) Die dualistisch entsprechende Aufgabe zu stellen und zu lösen (§ 25a).

17) Wenn man durch den Scheitel zweier concentrischer Strahlenbüschel S, S' einen Kreis zieht, und die entsprechenden Strahlen denselben in den Punktepaaren a,a'; b,b'; c,c'; d,d' ... treffen, so schneiden sich ab und $a'b'$, ac und $a'c'$, ad und $a'd'$ ... auf einer Geraden G.

Andeutung. Die Strahlenbüschel a' $(a, b, c, d \ldots)$ und a $(a', b', c', d' \ldots)$ sind projectivisch, weil jeder derselben mit einem der Strahlenbüschel S und S' projectivisch ist. Ausserdem liegen diese beiden Büschel perspectivisch.

18) Zwei concentrische Strahlenbüschel seien durch drei Paare entsprechender Strahlen bestimmt. Durch Anwendung von 17) soll man

α) zu einem beliebigen Strahle des einen Büschels den entsprechenden finden,

β) die beiden Strahlen bestimmen, welche sich selbst entsprechen.

Andeutung zu β). Die Gerade G (17) schneidet den Kreis in zwei Punkten, welche auf den gesuchten Strahlen liegen.

19) Zwei ähnliche Punktreihen desselben Trägers sind durch zwei Paare entsprechender Punkte bestimmt. Man soll den sich selbst entsprechenden Punkt des Trägers suchen.

Die Auflösung geschieht nach 6) und § 24, Anmerkung. Der Träger der zu Hülfe genommenen Punktreihe (Aufgabe 3) muss mit dem gegebenen parallel sein.

20) Wenn zwei projectivische Punktreihen auf demselben Träger liegen, so befinden sich diejenigen Punkte, in welchen entsprechende Punkte beider Reihen zusammenfallen, innerhalb oder ausserhalb der von den Gegenpunkten begrenzten Strecke, je nachdem die beiden Punktreihen gleichlaufend oder ungleichlaufend sind.

Andeutung. Ein Gegenpunkt theilt den Träger in zwei Aeste. Entsprechende Punkte liegen auf Aesten gleicher oder entgegengesetzter Richtung, je nachdem die Reihen gleichlaufend oder ungleichlaufend sind.

21) Wenn sich zwei projectivische Reihen auf demselben Träger befinden, so liegen diejenigen Punkte m und n, in welchen entsprechende Punkte sich decken, symmetrisch zu den Gegenpunkten.

Andeutung. Man drehe die eine Punktreihe um den Punkt m und ziehe das Parallelogramm in Betracht, welches durch m, die beiden Gegenpunkte und den Projectionsmittelpunkt gebildet ist (§ 23a). Die beiden anfänglich in n vereinigten Punkte bilden nun mit m ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie durch den Projectionsmittelpunkt geht.

22) In zwei projectivischen Reihen ist das Product der Abstände je zweier entsprechender Punkte von den Gegenpunkten der Reihen constant

Andeutung. Man denke sich die Reihen in perspectivische Lage gebracht: Jenes Product ist alsdann dem Producte der Seiten des in der Andeutung zu 21) erwähnten Parallelogrammes, wie sich aus der Aehnlichkeit zweier Dreiecke zeigen lässt.

IV. Abschnitt.

Involutorische Gebilde.

Involutorische Punktreihen und Strahlenbüschel. § 27.

a) Erklärung. Wenn m ein Punkt einer Geraden und k eine positive oder negative Grösse ist, so existiren auf dieser Geraden unendlich viele Paare von Punkten c, d, welche der Gleichung $(mc).(md) = k$ genügen. Die Gesammtheit dieser Punktepaare wird eine involutorische Punktreihe genannt. Je zwei Punkte c, d heissen zugeordnete. m ist der Mittelpunkt und k die Potenz der involutorischen Reihe.

Fig. 32a.

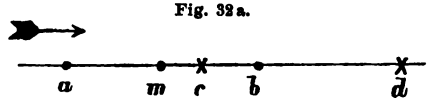
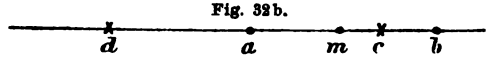


Fig. 32b.



b) Eine involutorische Punktreihe enthält zwei sich selbst zugeordnete Punkte (Doppelpunkte) oder keine solche, je nachdem k positiv oder negativ ist. Im ersten Falle theilen je zwei zugeordnete Punkte den Abstand der Doppelpunkte a und b (Fig. 32a) harmonisch.

α) Erklärung. Unter einem involutorischen Strahlenbüschel versteht man die Gesammtheit aller Strahlenpaare, durch welche die Punktepaare einer involutorischen Punktreihe aus einem Punkte projicirt werden, welcher nicht auf dem Träger der Reihe liegt. Zwei Strahlen, welche zugeordnete Punkte der involutorischen Reihe enthalten, heissen ebenfalls zugeordnet.

β) Ein involutorischer Strahlenbüschel enthält zwei sich selbst zugeordnete Strahlen (Doppelstrahlen) oder keine solche, je nachdem er aus einer involutorischen Punktreihe mit oder ohne Doppelpunkte entstanden ist. Im ersten Falle theilen je zwei zugeordnete Strahlen die Winkel der Doppelstrahlen harmonisch.

Beweis b). Wenn die zugeordneten Punkte d und c in einen einzigen Punkt x fallen sollen, so muss $(mx)^2 = k$ sein. Man erhält also zwei sich selbst zugeordnete Punkte a und b, wenn man die Länge $\sqrt{k}$ auf beiden Seiten von m abträgt. Die Gleichung

der involutorischen Reihe heisst dann $(ma)^2 = (mb)^2 = mc \cdot (md)$, woraus nach § 11, Anmerk. zu Beispiel 2), unmittelbar die 2. Behauptung folgt.

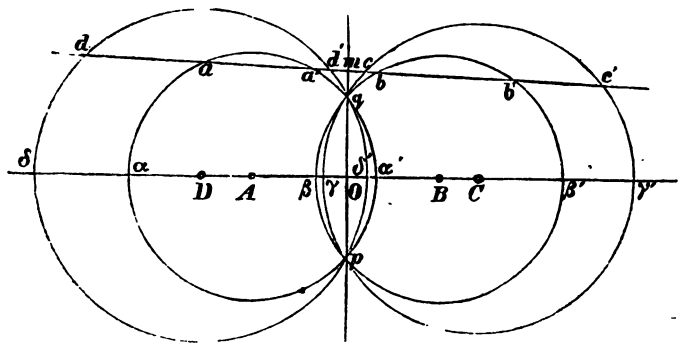
β) Die Behauptungen folgen aus b), α) und § 12a.

§ 28. Der Büschel von Kreisen, welche durch zwei feste Punkte gehen.

a) Diejenigen Kreise, welche durch zwei feste Punkte q und p gehen, schneiden eine beliebige Gerade in den Punktepaaren einer involutorischen Reihe.

Beweis. Nach § 4. der Einleitung gilt für die Punktepaare aa', bb', $cc' \cdots$ in Fig. 33 die Gleichung $(mq)\,(mp) = (ma) \cdot (ma') = (mb) \cdot (mb') = (mc) \cdot (mc')$, woraus sich nach § 27a die Behauptung ergiebt. m ist der Mittelpunkt und $(mq) \cdot (mp)$ die Potenz der involutorischen Reihe.

Fig. 33.



Anmerkung. Wenn man in dem Mittelpunkte O (Fig. 33) einer involutorischen Reihe $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma' \cdots\cdots$ ohne Doppelpunkte eine Senkrechte errichtet und auf derselben nach beiden Seiten die mittlere Proportionale zwischen $o\alpha$ und $o\alpha'$ (oder zwischen $o\beta$ und $o\beta'$) nach oq oder op aufträgt, so ist jedes der Dreiecke $\alpha q\alpha'$, $\beta q\beta'$, $\gamma q\gamma' \cdots$ oder $\alpha p\alpha'$, $\beta p\beta'$, $\gamma p\gamma'$ rechtwinklig. Man zeigt dies leicht, indem man z. B. die Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke αoq und $\alpha' oq$ beweist und die daraus folgenden Beziehungen der Winkel beider Dreiecke benützt.

Hieraus folgt aber der Satz:

Es gibt immer zwei Punkte, von welchen aus die Punktepaare einer involutorischen Reihe ohne Doppelpunkte unter rechten Winkeln gesehen werden. Jeder durch q und p gezogene Kreis hat den Abstand zweier zugeordneter Punkte zum Durchmesser.

b) Aufgabe. Beliebig viele Punktepaare einer involutorischen Reihe zu construiren, in welcher die Punkte aa', bb', (Fig. 33) zugeordnet sind.

β) Aufgabe. Beliebig viele Strahlenpaare eines involutorischen Büschels zu construiren, in welchem die Strahlen AA', BB' zugeordnet sind.

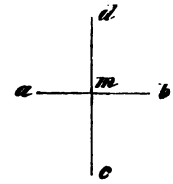
Auflösungen. b) Man nehme einen beliebigen Punkt q ausserhalb des Trägers an und ziehe durch $aa'q$ und $bb'q$ zwei Kreise. Dieselben schneiden sich noch in einem weitern Punkte p und alle Kreise, welche durch p und q gehen, treffen die Gerade in Punktepaaren der involutorischen Reihe.

β) Man schneide die 4 Strahlen durch eine Gerade in den Punkten aa', bb' und projicire nach Anwendung von b) die erhaltenen Punktepaare aus dem Scheitel des Büschels (§ 27α).

Vorbereitende Sätze. § 29.

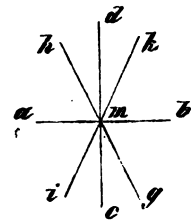
a) Je zwei Strahlen eines Punktes, welche auf einander senkrecht stehen, entsprechen sich auf doppelte Weise in zwei congruenten Strahlenbüscheln.

Fig. 34.



Beweis. Man denke sich die Figur zweier auf einander senkrecht stehender Geraden M und N, welche Anfangs bezüglich mit ab und cd (Fig. 34) zusammenfallen, um den Punkt m links herum gedreht. Dann beschreiben die Strahlen M und N zwei congruente und gleichlaufende Strahlenbüschel, von welchen der eine dem andern um eine Viertelsdrehung voraus ist. Wenn M in der Lage ab ist, so befindet sich N in cd. Wenn aber M in der Lage cd angekommen ist, so befindet sich N in ab. Die Strahlen cd und ab entsprechen sich also in diesen Strahlenbüscheln doppelt, d. h. dem Strahl cd, mag er als Strahl des einen oder des andern Büschels betrachtet werden, entspricht immer der Strahl ab.

Fig. 35.



b) Je zwei durch einen Punkt m (Fig. 35) gehende Strahlen hg und ik, deren Winkel von den senkrechten Strahlen ab und cd halbirt werden, entsprechen sich auf doppelte Weise in zwei congruenten Strahlenbüscheln.

Beweis. Man denke sich zwei Strahlen M und N, welche Anfangs mit der Geraden cd zusammenfallen, bezüglich in rechts und links herumgehender Drehung so um m bewegt, dass beide Strahlen jederzeit mit cd Winkel von gleicher Grösse aber von entgegengesetztem Sinne bilden. Die beiden

Strahlen werden dann congruente Strahlenbüschel von entgegengesetztem Sinne beschreiben. Wenn M den Winkel dmk beschrieben hat und in die Lage von ik gekommen ist, so ist N durch eine entgegengesetzte Drehung in die Lage gh gekommen. Ist jedoch M bis nach hg gelangt, so ist N bei ik angekommen. ik und hg entsprechen sich also in beiden Büscheln doppelt, d. h. dem Strahl ik, mag er als Strahl des einen oder des andern Büschels betrachtet werden, entspricht immer der Strahl gh. Es ist noch zu bemerken, dass in den Schenkeln des rechten Winkels entsprechende Strahlen beider Büschel zusammenfallen.

§ 30. Identität involutorischer Gebilde mit projectivischen Gebilden, deren Elemente sich doppelt entsprechen.

a) Eine involutorische Punktreihe ist die Vereinigung zweier projectivischer Punktreihen, deren Punkte sich paarweise doppelt entsprechen.

α) Ein involutorischer Strahlenbüschel ist die Vereinigung zweier projectivischer Strahlenbüschel, deren Strahlen sich paarweise doppelt entsprechen.

Beweis a. 1) Wenn die involutorische Reihe zwei Doppelpunkte p und q (Fig. 36) hat, so zeichne man über pq als Durchmesser einen Kreis und projicire aus einem beliebigen Punkte m die auf pq befindliche involutorische Reihe. Wenn aa' ein Punktepaar

Fig. 36.

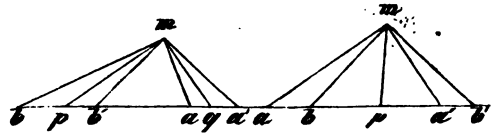


Fig. 37.

der Letztern ist, so sind a, a', p, q vier harmonische Punkte (§ 27b) und die Winkel der Strahlen ma und ma' werden durch die Schenkel mq und mp des rechten Winkels pmq halbirt (Anmerkung zu § 12γ). Die zugeordneten Strahlen ma und ma', mb und mb' ... bilden also zwei projectivische Strahlenbüschel, in welchen sie sich auf doppelte Weise entsprechen (§ 29b). Daraus folgt aber nach §. 18a, dass die zugeordneten Punkte a und a', b und b' ... zwei projectivische Punktreihen bilden, in welchen sie sich ebenfalls auf doppelte Weise entsprechen.

2) Wenn die involutorische Reihe keine Doppelpunkte hat, so gibt es zwei Punkte, aus welchen ihre Punktepaare a, a'; b, b'; ... (Fig. 37) unter rechten Winkeln gesehen werden (An-

merkung zu § 28). Nach § 29a werden die Punktepaare der involutorischen Reihe aus einem dieser Punkte m durch Strahlenpaare ma, ma'; mb, mb' ..... projicirt, deren Strahlen sich in zwei projectivischen Strahlenbüscheln auf doppelte Weise entsprechen. Hieraus folgt wie unter 1) die Richtigkeit der Behauptung nach § 18a.

α) Der gegebene involutorische Strahlenbüschel muss durch Projection einer involutorischen Punktreihe aus einem Punkte m enstanden sein. Die zugeordneten Punkte a und a', b und b' ... Dieser Punktreihe bilden zwei projectivische Punktreihen, in welchen sie sich auf doppelte Weise entsprechen. Die zugeordneten Strahlen ma und ma', mb und mb' ... müssen also nach § 18a zwei projectivische Strahlenbüschel bilden, in welchen sie sich ebenfalls auf doppelte Weise entsprechen.

b) Wenn in zwei projectivischen Punktreihen desselben Trägers zwei Punkte sich doppelt entsprechen, so ist dasselbe bei allen andern Punktepaaren der Fall und dieselben bilden eine involutorische Punktreihe.

β) Wenn in zwei projectivischen Strahlenbüscheln desselben Scheitels zwei Strahlen sich doppelt entsprechen, so ist dasselbe bei allen andern Strahlenpaaren der Fall und dieselben bilden einen involutorischen Strahlenbüschel.

Beweis b) Wenn die Punkte a und a' sich in zwei projectivischen Punktreihen doppelt entsprechen und b, b' ein anderes Paar entsprechender Punkte ist, so entsprechen den Punkten a, a', b der ersten Punktreihe die Punkte a', a, b' der zweiten. Man kann aber auch eine involutorische Punktreihe construiren, in welcher a, a' und b, b' zwei Paare entsprechender Punkte sind (§. 28b) und diese stellt die Vereinigung zweier projectivischer Punktreihen dar, in welchen den Punkten a, a', b der einen Reihe ebenfalls die Punkte a', a, b' der andern entsprechen (§ 30a). Die Punktepaare dieser involutorischen Punktreihe müssen also mit den Paaren entsprechender Punkte in den gegebenen Reihen zusammenfallen (§ 18b).

β) Die beiden Strahlenbüschel projiciren sich auf eine Gerade, welche nicht durch ihren gemeinschaftlichen Scheitel geht, als zwei projectivische Punktreihen, in welchen sich diejenigen Punkte doppelt entsprechen, welche die Projectionspunkte der beiden sich doppelt entsprechenden Strahlen sind. In diesen beiden Punktreihen entsprechen sich also nach b) je zwei Punkte doppelt und sie bilden eine involutorische Reihe. Die Behauptung folgt demnach aus § 27α.

§ 31. Folgerungen.

Dass eine involutorische Punktreihe aus jedem Punkte, der nicht auf ihrem Träger gelegen ist, durch einen involutorischen Strahlenbüschel projicirt wird, folgt schon aus der Definition § 27α. Dagegen kann der umgekehrte Satz erst an dieser Stelle bewiesen werden.

a) Ein involutorischer Strahlenbüschel wird durch jede Gerade, welche nicht durch den Scheitel geht, in einer involutorischen Punktreihe geschnitten.

Beweis. Der involutorische Strahlenbüschel stellt die Vereinigung zweier projectivischer Strahlenbüschel dar, deren Strahlen sich doppelt entsprechen. Dieselben projiciren sich auf die genannte Gerade als zwei projectivische Punktreihen, deren Punkte sich ebenfalls doppelt entsprechen (§ 18a). Die Behauptung folgt also aus § 30b.

b) Zwei Paare a, a' und b, b' zugeordneter Elemente bestimmen ein einziges involutorisches Gebilde.

Beweis. Zu einem beliebigen Elemente m des einen Gebildes kann nur ein einziges Element m' des andern zugeordnet sein, denn m und m' müssen entsprechende Elemente zweier projectivischer Gebilde sein, deren projectivische Beziehung durch drei Paare a, a'; a', a; b, b' vollständig bestimmt ist.

Anmerkung. Wenn m der Mittelpunkt und k die Potenz einer involutorischen Reihe sind, so befinden sich die Doppelpunkte in der Entfernung $\sqrt{k}$ zu beiden Seiten von m. Je nachdem k positiv oder negativ ist, wird $\sqrt{k}$ reell und imaginär sein und man spricht, zumal in der analytischen Geometrie von reellen oder imaginären Doppelpunkten der involutorischen Reihe. Aus ähnlichen Gründen schreibt man einem involutorischen Strahlenbüschel reelle oder imaginäre Doppelstrahlen zu. Bei Annahme dieser Begriffe kann man alsdann sagen: Ein involutorisches Grundgebilde ist durch seine reellen oder imaginären Doppelelemente bestimmt. Bei Anwendung dieser Ausdrucksweise in den zu späteren Paragraphen gehörigen Uebungen denken wir jedoch die imaginären Doppelelemente immer durch zwei Paare zugeordneter Elemente bestimmt.

§ 32. Aufgaben.

a) Aufgabe. In einem involutorischen Strahlenbüschel zwei zugeordnete Strahlen aufzusuchen, welche einen rechten Winkel mit einander bilden.

Auflösung. Wenn der involutorische Strahlenbüschel zwei Doppelstrahlen hat, so schliessen die Halbirungslinien der von diesen Strahlen gebildeten Winkel einen rechten Winkel ein. Wenn der involutorische Strahlenbüschel keine Doppelstrahlen hat, so schneide man denselben durch eine Gerade G in einer involutorischen Punktreihe und suche die beiden Punkte m und n auf, von welchen aus die Punktepaare dieser Reihe unter rechten Winkeln gesehen werden (Anmerkung zu § 28). Ein Kreis, welcher durch m, n und den Scheitel des gegebenen Büschels gelegt wird, trifft die Gerade G in zwei Punkten, welche auf den gesuchten Strahlen liegen.

Anmerkung. Wenn zwei Strahlenpaare existiren, welche der Bedingung der Aufgabe genügen, so stehen je zwei zugeordnete Strahlen des involutorischen Büschels auf einander senkrecht, wie aus § 29a folgt.

b) Aufgabe. Zwei projectivische Punktreihen so zu legen, dass sie eine involutorische Punktreihe bilden.

β) Aufgabe. Zwei projectivische Strahlenbüschel so zu legen, dass sie einen involutorischen Strahlenbüschel bilden.

Auflösung b). Wenn zwei projectivische Punktreihen in dieselbe Gerade so gelegt werden, dass die Gegenpunkte beider Reihen in denselben Punkt p der Geraden fallen, so bilden die Punktreihen nach § 30b eine involutorische Punktreihe, weil der Punkt p und der unendlich ferne Punkt der Geraden sich in beiden Punktreihen auf doppelte Art entsprechen. Wenn umgekehrt zwei projectivische Punktreihen involutorisch liegen, so muss der unendlich ferne Punkt des Trägers, als Punkt einer jeden der beiden Reihen betrachtet, dem gleichen Punkt p des Trägers in der andern Reihe entsprechen.

β) Wenn man zwei projectivische Strahlenbüschel so legt, dass die sich entsprechenden rechten Winkel sich decken (§ 25b), so bilden die Strahlenbüschel nach 28β einen involutorischen Strahlenbüschel, weil die Schenkel des rechten Winkels sich in beiden Büscheln doppelt entsprechen.

Anmerkung. Wenn zwei projectivische Gebilde so liegen, dass sie ein einziges involutorisches Gebilde darstellen, so hat das letztere Doppelelemente oder nicht, je nachdem die beiden projectivischen Gebilde ungleichlaufend oder gleichlaufend sind, wie man für die Punktreihen aus der Gleichung der involutorischen Reihe in § 27a und hierauf für Strahlenbüschel durch Anwendung von § 27α erkennen kann.

§ 33. Uebungen.

1) Wenn a, b, c, d vier Punkte einer Geraden sind, so ist die Punktgruppe (a, b, c, d) jeder Punktgruppe, wie (b, a, d, c), projectivisch, welche aus der ersten dadurch entsteht, dass man die 4 Punkte willkürlich in zwei Paare theilt und die Punkte jedes Paares unter einander vertauscht.

Andeutung. Die Punktepaare a, b und c, d bestimmen eine involutorische Reihe, woraus unmittelbar folgt, dass die Gruppen (a, b, c, d) und (b, a, d, c) projectivisch sind.

2) Man soll den dualistisch zugeordneten Satz aussprechen und beweisen.

3) Die 3 Paare von Gegenseiten eines vollständigen Vierecks schneiden jede Gerade G in drei Punktepaaren a und a', b und b', c und c' einer involutorischen Reihe.

Andeutung. Auf der durch a gehenden Seite des vollständigen Vierecks liegen noch drei Punkte, nämlich ein Nebeneck und zwei Ecken des Vierecks. Projicirt man diese 4 Punkte nach einander aus jedem der noch übrigen Ecken des vollständigen Vierecks auf die Gerade G, so erkennt man (§ 18a), dass die Punktgruppen $ab'a'c$ und $ac'a'b$ projectivisch sind. Da aber auch nach 1) die Gruppe $ac'a'b$ mit $a'bac'$ projectivisch ist, so folgt hieraus (§ 18a) die Projectivität von $ab'a'c$ und $a'bac'$, woraus nach § 30b die Behauptung folgt.

4) Man beachte in 3) den besondern Fall, wo G durch ein oder zwei Nebenecken geht (§ 13c, § 12α).

5) Die 3 Paare von Gegenseiten eines vollständigen Vierecks sind mit drei Paaren zugeordneter Strahlen eines involutorischen Strahlenbüschels parallel.

Andeutung. Benütze die Aufgabe 4) und die unendlich ferne Gerade (§ 22d) als diejenige, welche die Seiten des Vierecks schneidet. Wende auch § 22a an.

6) Die drei Paare von Gegenecken eines vollständigen Vierseits werden aus jedem weiteren Punkte durch drei Strahlenpaare eines involutorischen Strahlenbüschels projicirt (Beweis analog demjenigen von 3).

7) Man beachte den Fall, wo dieser Punkt auf einer Diagonale gelegen ist, oder in den Schnittpunkt zweier Diagonalen fällt (§ 13 γ § 12a).

8) Wenn man einen Punkt m mit jedem Eck eines Dreiecks verbindet und jedesmal durch m eine Parallele mit der diesem Eck gegenüberliegenden Seite zieht, so erhält man 3 Strahlenpaare eines involutorischen Büschels (eine Involution von Strahlen).

Andeutung. Die Seiten des Dreiecks und die unendlich ferne Gerade bestimmen ein vollständiges Vierseit. Man wende Aufgabe 6) an.

9) In einer involutorischen Punktreihe, welche durch zwei Punktepaare a und a', b und b' bestimmt ist, soll man zu jedem fünften Punkte c den zugehörigen c' mit Hülfe des Lineals allein finden (§ 33, 3).

Andeutung. Nach 3). Man kann drei Geraden, welche durch a, a', b beliebig gezogen sind, als Seiten des vollständigen Vierecks annehmen.

10) In einem involutorischen Strahlenbüschel, welches durch zwei Strahlenpaare A und A', B und B' bestimmt ist, soll man zu jedem fünften Strahle C den zugehörigen C' mit Hülfe des Lineals allein finden (Aufgabe 6).

11) Eine involutorische Punktreihe sei bestimmt

α) durch ihre beiden Doppelpunkte; man soll zu jedem Punkte den zugeordneten finden (§ 13δ);

β) durch einen Doppelpunkt und ein Paar entsprechender Punkte; man soll den zweiten Doppelpunkt finden (§ 13δ).

12) Die dualistisch zugeordneten Aufgaben zu stellen und zu lösen (§ 13d).

13) Eine involutorische Punktreihe sei durch zwei Paare zugeordneter Punkte bestimmt. Man suche

α) den Mittelpunkt der Reihe,

β) die etwa vorhandenen Doppelpunkte.

Andeutung. α) wird nach 9) gelöst, da dem Mittelpunkte der Reihe der unendlich ferne Punkt zugeordnet ist (der Gebrauch des Zirkels ist zum Ziehen einer Parallelen gestattet); nachdem der Mittelpunkt gefunden ist, wird β) durch Aufsuchen einer mittleren Proportionalen gelöst.

14) Wie kann man die Aufgabe 12 auch durch § 28a und I, § 84a*) lösen?

15) Das zwei gegebenen involutorischen Reihen gemeinschaftliche Paar zugeordneter Punkte zu bestimmen.

Andeutung. Durch Anwendung von § 28b und I, § 33d**).

16) Die Aufgabe 15) zu lösen, wenn beide involutorische Reihen durch ihre Doppelpunkte bestimmt sind (Aufgabe 13β.)

17) Es sind zwei Paare von Punkten a und a', b und b' gegeben. Man soll zwei Punkte suchen, welche mit jedem der beiden Paare vier harmonische Punkte bilden (Aufgabe 15).

V. Abschnitt.

Pol und Polare in Bezug auf den Kreis.

Pol und Polare. § 84.

a) Wenn man einen beliebigen Punkt p (Fig. 38) mit dem Mittelpunkte eines Kreises verbindet und auf dem so bestimmten Durchmesser denje-

α) Wenn man aus dem Mittelpunkte eines Kreises auf eine beliebige Gerade P (Fig. 38) eine Senkrechte fällt und auf dem so bestimmten Durchmesser

*) Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt.

**) Einen Kreis zu zeichnen, der durch drei gegebene Punkte geht.

nigen Punkt m sucht, welcher mit p zusammen den Durchmesser harmonisch theilt, so heisst die in m errichtete Senkrechte P die Polare von p.

Aus α) folgt, dass zugleich p der Pol von P ist.

b) Die Polare eines ausserhalb des Kreises gelegenen Punktes ist durch seine Berührungssehne dargestellt.

Die Polare eines Kreispunktes fällt mit seiner Tangente zusammen.

Die Polare eines innerhalb des Kreises gelegenen Punktes trifft den Kreis nicht.

denjenigen Punkt p sucht, welcher mit dem Fusspunkte m den Durchmesser harmonisch theilt, so heisst p der Pol von P.

Aus a) folgt, dass zugleich P die Polare von p ist.

β) Der Pol einer Sehne ist der Schnittpunkt ihrer Endestangenten.

Der Pol einer Tangente fällt mit ihrem Berührungspunkte zusammen.

Der Pol einer Geraden, welche den Kreis nicht trifft, ist innerhalb des Kreises gelegen.

Beweis b). Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus a) und dem zweiten Beispiel in § 11. Wenn zweitens p auf dem Kreise liegt, so fällt m mit p zusammen und die Polare steht im Endpunkte senkrecht auf dem Radius, das heisst, sie ist die Tangente des Kreises im Punkte p. Wenn endlich p innerhalb des Kreises liegt, so fällt der 4te harmonische Punkt des Durchmessers und dadurch auch die in ihm errichtete Senkrechte, die Polare, ausserhalb des Kreises. Die Sätze unter β) sind die Umkehrungen der Sätze b) und folgen leicht aus denselben.

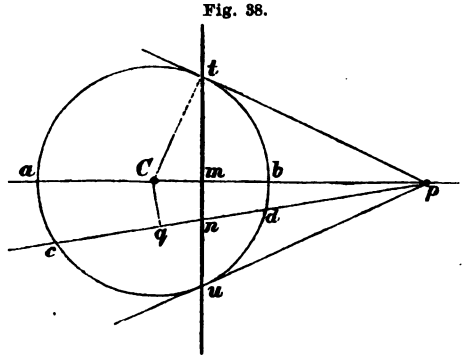
c) Die Punkte einer Geraden (welche den Kreis nicht berührt) und die Schnittpunkte der zugehörigen Polaren mit derselben Geraden bilden die Punktepaare einer involutorischen Punktreihe.

Wenn die gegebene Gerade den Kreis in zwei Punkten trifft, so sind dieselben Doppelpunkte der involutorischen Reihe. Wenn die gegebene Gerade den Kreis nicht trifft, so enthält die involutorische Reihe keine Doppelpunkte.

Beweis. cd (Fig. 38) sei die gegebene Gerade und p ein beliebiger Punkt auf ihr. n sei der Schnittpunkt der Geraden mit der Polaren von p und Cq sei senkrecht auf cd gefällt. Da der Winkel nmp recht ist, so liegen die Punkte n, m, p auf einem Kreise, dessen Durchmesser np ist. $(Cm) \cdot (Cp)$ und $(qn) \cdot (qp)$ sind die Potenzen der Punkte C und q in Bezug auf diesen Kreis. Die Differenz der Potenzen beider Punkte ist der Differenz der

Quadrate ihrer Entfernungen von dem Mittelpunkte des Kreises nmp gleich (Einleitung § 4d). Da dieser Mittelpunkt mit q und C ein bei q rechtwinkliges Dreieck bildet, so ist die Differenz jener Quadrate gleich $(cq)^2$. Aus $(Cm)\cdot(Cp) - (qm)(qp) = (Cq)^2$ und $(Cm)\cdot(Cp) = (Cb)^2$, (§ 11 Anmerkung zu Beispiel 2) erhält man durch Abziehen der ersten Gleichung von der zweiten: $(Cb)^2 - (Cq)^2 = (qm)\cdot(qp)$.

Fig. 38.



$(cb)^2 - (cq)^2$ ist aber nichts anderes als $(qd)^2$, so dass man zu der Gleichung $(qd)^2 = (qc)^2 = (qn)\cdot(qp)$ kommt, durch welche nach § 27a die Behauptung bewiesen ist.

Anmerkung. Wenn die gegebene Gerade den Kreis berührt, so zerfällt die involutorische Reihe, indem alsdann die Polare eines jeden auf dieser Tangente gelegenen Punktes durch den Berührungspunkt geht.

Conjugirte Punkte. § 35.

a) Wenn der Punkt q auf der Polaren von p liegt, so liegt auch p auf der Polaren von q.

α) Wenn die Gerade Q durch den Pol von P geht, so geht auch P durch den Pol von Q.

Beweis a). Es sind zwei Fälle zu unterscheiden. 1) Wenn die Gerade pq den Kreis nicht berührt, so erzeugen die Punkte dieser Geraden und die zugehörigen Polaren eine involutorische Reihe auf derselben, in welcher die Punkte p und q einander zugeordnet sind (§ 34c). Würde nun die Polare von q nicht durch p, sondern durch einen andern Punkt m der Geraden pq gehen, so wären q und m auch zugeordnete Punkte, das heisst, der Punkt q würde sowohl mit p als auch mit m ein Paar zugeordneter Punkte derselben involutorischen Reihe bilden, was unmöglich ist.

2) Wenn pq Tangente ist, so muss q der Berührungspunkt dieser Tangente sein (§ 34b). Dann fällt aber die Polare von q mit dieser Tangente zusammen und geht deshalb durch p, was zu beweisen war. Der Satz α) ist nur eine andere Ausspruchsweise des Satzes a).

b) Erklärung. Zwei Punkte heissen conjugirt, wenn der eine und folglich jeder in der Polaren des andern liegt.

c) Die Pole aller Geraden eines Punktes p liegen auf der Polaren P dieses Punktes.

β) Erklärung. Zwei Geraden heissen conjugirt, wenn die eine und folglich jede durch den Pol der andern geht.

γ) Die Polaren aller Punkte einer Geraden P gehen durch den Pol p dieser Geraden.

Beweis c). Diese Pole sind dem Punkte p conjugirt und müssen also auf seiner Polaren liegen. γ) Diese Polaren sind der Geraden P conjugirt und müssen also durch ihren Pol gehen.

d) Zwei conjugirte Punkte und der Pol ihrer Verbindungslinie oder zwei conjugirte Gerade und die Polare ihres Schnittpunktes bilden ein sogenanntes Polardreieck, das heisst ein Dreieck, in welchem jede Seite die Polare des gegenüberliegenden Ecks und jedes Eck der Pol der gegenüberliegenden Seite ist (b und β).

§ 36. Fortsetzung.

a) Die conjugirten Punkte einer Geraden bilden eine involutorische Punktreihe.

Die Doppelpunkte dieser Reihe sind durch die Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreise dargestellt.

α) Die conjugirten Strahlen eines Punktes bilden einen involutorischen Strahlenbüschel.

Die Doppelstrahlen dieses Büschels sind durch die von dem Punkte an den Kreis gelegten Tangenten dargestellt.

Beweis. a) Dieser Satz folgt aus § 34c und § 35b. α) Die durch den gegebenen Punkt p gezogenen Geraden und ihre Pole bestimmen auf der Polaren P von p eine involutorische Reihe (§ 34c, § 36a). Die Gesammtheit aller conjugirten Strahlen, welche durch p gehen, wird nun durch diejenigen Strahlen dargestellt, welche jene involutorische Reihe aus dem Punkte p projiciren (§ 35β). Der Beweis folgt also aus § 27α

b) Zusatz. Jede Secante wird durch zwei conjugirte Punkte derselben harmonisch getheilt.

β) Zusatz. Die Winkel zweier Tangenten werden durch zwei conjugirte Strahlen ihres Schnittpunktes harmonisch getheilt.

Anmerkung. Mit Rücksicht auf die Anmerkung in § 31. kann man sagen:

Die reellen oder imaginären Punkte, welche eine Gerade mit einem Kreise gemein hat, sind die reellen oder imaginären Doppelpunkte derjenigen involutorischen Reihe, welche durch die conjugirten Punkte jener Geraden gebildet ist.

Die reellen oder imaginären Tangenten eines Kreises, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, sind die reellen oder imaginären Doppelstrahlen desjenigen involutorischen Strahlenbüschels, welcher durch die conjugirten Strahlen jenes Punktes gebildet wird.

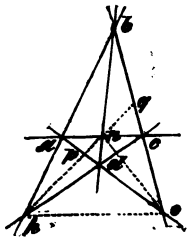
c) Wenn ein vollständiges Viereck einem Kreise einbeschrieben ist, so ist die Polare jedes Nebenecks durch die Verbindungslinie der übrigen dargestellt. (Die Nebenecken bilden ein Polardreieck.)

γ) Wenn ein vollständiges Vierseit einem Kreise umbeschrieben ist, so ist der Pol jeder Diagonale durch den Schnittpunkt der übrigen dargestellt. (Die Diagonalen bilden ein Polardreieck.)

Beweise.

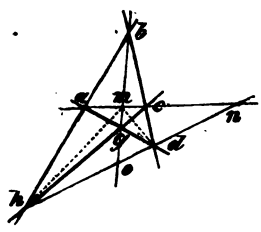
Wenn (Fig. 39) a, b, c, d die Ecken des Vierecks sind, so stellen ad und bc zwei Secanten des Kreises dar, welche sich in dem

Fig. 39.



Wenn (Fig. 40) ab, bc, cg, ga die Seiten des Vierseits sind, so sind h und d die Scheitel zweier Tangentenwinkel und hd ist eine

Fig. 40.



Nebeneck o schneiden. Die Verbindungslinie nh der übrigen Nebenecken theilt diese beiden Secanten in p und q harmonisch (§ 13b). Die Punkte p und q sind also dem Punkte o conjugirt (§ 36b) und ihre Verbindungslinie pq oder nh ist die Polare von o.

Diagonale des Vierseits. Die nach dem Schnittpunkte der übrigen Diagonalen gezogenen Geraden hm und dm theilen mit hd die Winkel der durch h und d gezogenen Tangenten harmonisch (§ 13β). Die Geraden hm und dm sind desshalb der Geraden hd conjugirt (§ 36β) und schneiden sich in ihrem Pole m.

d) Aufgabe. Wenn ein Kreis gezeichnet vorliegt, so soll zu einem beliebigen Punkte die zugehörige Polare ohne Hülfe des Zirkels gefunden werden.

δ) Aufgabe. Wenn ein Kreis gezeichnet vorliegt, so soll zu einer beliebigen Geraden der zugehörige Pol ohne Hülfe des Zirkels gefunden werden.

Auflösung. Die Construction von d) folgt unmittelbar aus c). Um δ auszuführen, suche man zu zwei Punkten der gegebenen Geraden die zugehörigen Polaren. Sie schneiden sich in dem gesuchten Pole.

VI. Abschnitt.

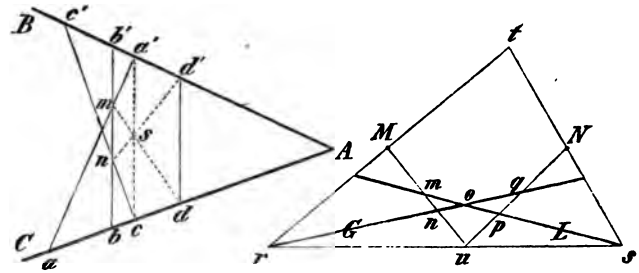
Projectivische Gebilde in schiefer Lage.

§ 37. Aufgaben.

a) Von zwei projectivischen Punktreihen, deren Träger die Geraden AC und AB sind

α) Von zwei projectivischen Strahlenbüscheln, deren Scheitel M und N (Fig. 42) sind,

Fig. 41 und 42.



(Fig. 41), kennt man 3 Paare entsprechender Punkte a, a'; b, b'; c, c'. Es soll zu jedem weitern Punkte der einen Reihe der entsprechende Punkt der andern gefunden werden, ohne die Reihen in perspectivische Lage zu bringen.

kennt man 3 Paare entsprechender Strahlen Mm, Nm; Mo, No; Mq, Nq. Es soll zu jedem weitern Strahle des einen Büschels der entsprechende Strahl des andern gefunden werden, ohne die Büschel in perspectivische Lage zu bringen.

Auflösung.

Wenn man einen beliebigen Punkt s auf der Verbindungslinie der sich nicht entsprechenden Punkte a' und c mit den beiden Punkten m und n des Projectionsstrahls bb' verbindet, so bestimmen die erhaltenen Geraden ms und ns zwei entsprechende Punkte d und d' beider Reihen.

Hieraus ergibt sich die Auflösung der Aufgabe.

Wenn man durch den Schnittpunkt u der sich nicht entsprechenden Strahlen Mm und Nq eine beliebige Gerade legt und ihre Schnittpunkte r und s mit den Geraden oq und om aufsucht, so sind hierdurch zwei entsprechende Strahlen Mr und Ns der beiden Büschel bestimmt.

Hieraus ergibt sich die Auflösung der Aufgabe.

Beweis.

Die projectivischen Punktreihen $a, b, c \ldots$ und $a', b', c' \ldots$ werden aus den Punkten m und n durch die projectivischen Strahlenbüschel $m\,(a, b, c \ldots)$ und $n\,(a', b', c' \ldots)$ projicirt. Diese Strahlenbüschel sind aber in perspectivischer Lage, weil der Strahl mn sich selbst entspricht und $a'c$ ist der perspectivische Durchschnitt derselben. Hierin ist der Beweis gelegen.

Die projectivischen Strahlenbüschel $Mm, Mo, Mq \ldots$ und $Nm, No, Nq \ldots$ projiciren sich auf die Geraden oq und om als zwei projectivische Punktreihen $n, o, q \ldots$ und $m, o, p \ldots$ Diese Punktreihen sind aber in perspectivischer Lage, weil der Punkt o sich selbst entspricht und u ist der Projectionsmittelpunkt derselben. Hierin ist der Beweis gelegen.

Anmerkung.

In dem Sechseck $nma'd'dc$ (Fig. 41), dessen Seiten durch die beiden Träger und 4 Projectionsstrahlen gebildet sind, schneiden sich die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken in einem Punkte s.

b) Man soll diejenigen Punkte bestimmen, welche in jeder der projectivischen Punktreihen in Fig. 41 dem Schnittpunkte A der beiden Träger entsprechen.

In dem Sechseck $MtNqom$ (Fig. 42), dessen Ecken durch die beiden Scheitel und 4 Schnittpunkte entsprechender Strahlen gebildet sind, schneiden sich die gegenüberliegenden Seiten in 3 Punkten r, u, s einer Geraden.

β) Man soll diejenigen Strahlen bestimmen, welche in jedem der projectivischen Strahlenbüschel in Fig. 42 der Verbindungslinie MN der Scheitel entsprechen.

Auflösung.

Man ziehe in Fig. 41 die Gerade nA und bestimme ihren Schnittpunkt mit $a'c$. Diejenige Gerade, welche diesen Punkt mit m verbindet, bestimmt auf AC den einen der gesuchten Punkte. Der andere wird auf analoge Weise gefunden (§ 37a).

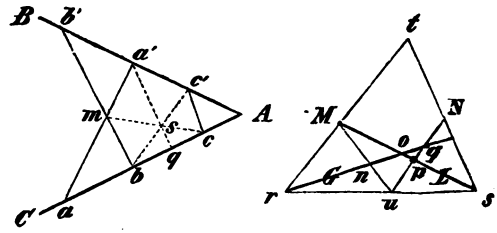
Man suche in Fig. 42 den Schnittpunkt der Geraden MN und nq, welchen man sodann mit dem Punkt n durch eine Gerade verbindet. Diese Gerade trifft die Linie mp in einem Punkte, welcher auf dem gesuchten Strahle des Büschels N gelegen ist. Der andere Strahl wird auf analoge Weise gefunden (§ 37α).

Aufgaben.

a) Von zwei projectivischen Punktreihen, deren Träger die Geraden AC und AB (Fig. 43)

α) Von zwei projectivischen Strahlenbüscheln, deren Scheitel die Punkte M und N (Fig. 44)

Fig. 43 u. 44.



sind, kennt man zwei Paare entsprechender Punkte a, a', und b, b', sowie denjenigen Punkt q der Reihe AC, welcher dem Schnittpunkte A der Träger entspricht.

Man soll zu jedem weitern Punkte der Reihe AC den entsprechenden Punkt der andern Reihe suchen.

sind, kennt man zwei Paare entsprechender Strahlen Mo und No, Mq und Nq, sowie denjenigen Strahl Mn des Büschels M, welcher der Verbindungslinie MN der Scheitel entspricht.

Man soll zu jedem weitern Strahle des Büschels M den entsprechenden Strahl des andern Büschels suchen.

Auflösung.

Wenn man durch einen beliebigen Punkt s der Geraden $a'q$ von m und b aus zwei

Wenn man durch den Schnittpunkt u von Mn und Nq eine beliebige Gerade zieht, und ihre

Strahlen zieht, so bestimmen diese auf den Trägern zwei entsprechende Punkte c und c'.

Hieraus ergibt sich die Lösung.

Schnittpunkte r, s mit der Geraden oq und oM aufsucht, so bestimmen dieselben zwei entsprechende Strahlen Mr und Ns der beiden Büschel.

Beweis.

Die projectivischen Punktreihen $abq\ldots$ und $a'b'A\ldots$ werden aus den Punkten m und b durch zwei projectivische und perspectivisch gelegene Strahlenbüschel m $(a, b, q\ldots)$ und b $(a', b', A\ldots)$ projicirt, deren perspectivischer Durchschnitt $a'q$ ist. Hierin ist der Beweis gelegen.

Die projectivischen Strahlenbüschel Mn, Mo, $Mq\ldots$ und NM, No, $Nq\ldots$ bestimmen auf den Geraden oq und Mo zwei projectivische Punktreihen n, o, $q\ldots M$, $o, p\ldots$, welche perspectivisch liegen und deren Projectionsmittelpunkt u ist. Hierin ist der Beweis gelegen.

Anmerkung.

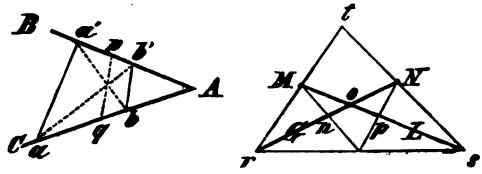
In dem Fünfeck $bma'c'c$, dessen Seiten durch die beiden Träger und drei Projectionsstrahlen gebildet sind, schneiden sich die Diagonalen mc und bc' mit der Geraden $a'q$ in einem Punkte s.

In dem Fünfeck $MtNqo$, dessen Ecken durch die Scheitel der Büschel und drei Schnittpunkte entsprechender Strahlen gebildet sind, liegen die Schnittpunkte r und s von zwei Paaren nicht anliegender Seiten mit dem Schnittpunkte u der fünften Seite und des Strahles Mn auf einer Geraden.

b) Von zwei projectivischen Punktreihen, deren Träger AC und AB sind (Fig. 45), kennt man ein Paar entsprechender Punkte a und a', sowie diejenigen Punkte p und q, welche in beiden Reihen dem Schnitt-

β) Von zwei projectivischen Strahlenbüscheln, deren Scheitel M und N sind (Fig. 46), kennt man ein Paar entsprechender Strahlen Mo und No, sowie diejenigen Strahlen Mu und Nu, welche in beiden Büscheln der

Fig. 45 u. 46.



punkte A der Träger entsprechen. Man soll zu jedem Punkte der einen Reihe den entsprechenden Punkt der andern finden.

Verbindungslinie der Scheitel entsprechen. Man soll zu jedem Strahle des einen Büschels den entsprechenden Strahl des andern finden.

Auflösung.

Wenn man einen beliebigen Punkt s von pq mit a und a' durch die Geraden as und $a's$ verbindet, so bestimmen dieselben zwei entsprechende Punkte b' und b. Hieraus ergibt sich die Auflösung der Aufgabe.

Wenn man durch den Punkt u eine beliebige Gerade zieht, und ihre Schnittpunkte r und s mit den Strahlen Mo und No aufsucht, so bestimmen dieselben zwei entsprechende Strahlen Mr und Ns. Hieraus ergibt sich die Auflösung.

Beweis.

Die perspectivischen Punktreihen $a, q, A \ldots$ und $a', A, p \ldots$ werden aus den Punkten a' und a durch zwei projectivische und perspectivisch gelegene Strahlenbüschel a' $(a, q, A \ldots)$ und a $(a', A, p \ldots)$ projicirt, deren perspectivischer Durchschnitt pq ist. Hierin ist der Beweis gelegen.

Die projectivischen Strahlenbüschel MN, Mo, $Mu \ldots$ und Nu, No, $NM \ldots$ bestimmen auf den Geraden No und Mo zwei projectivische und perspectivisch gelegene Punktreihen N, o, $n \ldots$ und p, o, M, deren Projectionsmittelpunkt u ist. Hierin ist der Beweis gelegen.

Anmerkung.

In dem Viereck $aa'b'b$, dessen Seiten durch die Träger und zwei Projectionsstrahlen gebildet sind, schneiden sich die Diagonalen ab' und $a'b$ in einem Punkte der Geraden pq.

In dem Viereck $MoNt$, dessen Ecken durch die Scheitel der Büschel und zwei Schnittpunkte entsprechender Strahlen gebildet sind, liegen die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegender Seiten mit dem Punkte u auf einer Geraden.

c) Die beiden Punktreihen auf AC und AB in Fig. 45 werden aus jedem Punkte der Geraden pq durch zwei projectivische und involutorisch gelegene Strahlenbüschel projicirt.

γ) Die beiden Strahlenbüschel M und N in Fig. 46 projiciren sich auf jede durch u gehende Gerade als zwei projectivische und involutorisch gelegene Punktreihen.

Beweis.

Die beiden Strahlenbüschel sind nach § 18a projectivisch und liegen involutorisch, weil der Richtung ab', mag sie als Strahl des einen oder des andern Strahlenbüschels angesehen werden (als sa oder sb'), immer in dem andern Büschel ein Strahl derselben Richtung $a'b$ (nämlich sa' oder sb) entspricht.

Die beiden auf der Geraden rs entstehenden Punktreihen sind nach § 18a projectivisch und liegen involutorisch, weil dem Punkte r, mag er als Punkt der einen oder andern Reihe angesehen werden (als auf Mt oder No liegend) immer in der andern Reihe derselbe Punkt s (auf Nt oder Mo liegend) entspricht.

Die Curve als Punktgebilde oder Tangentengebilde. § 39.

Wenn ein Punkt a sich bewegt, so beschreibt er eine Gerade oder eine „Curve."

Der Punkt a ist in jeder Lage ein „Punkt" der Curve.

Die Verbindungslinie des bewegten Punktes a mit einem festen Curvenpunkte b stellt eine Sehne dar, welche sich um b dreht.

Da b ein Curvenpunkt ist, so muss es sich ereignen, dass der bewegte Punkt a, welcher die Curve beschreibt, unendlich nahe an b herankommt, mit b zusammenfällt und sich wieder entfernt.

In dem Momente des Zusammenfallens der Punkte a und b nimmt die sich drehende Gerade ab eine Lage P ein, in welcher man sie als „Tangente" des Punktes b bezeichnet.

Wenn eine Gerade A sich bewegt, so dreht sie sich um einen Punkt oder sie beschreibt eine „Umhüllung."

Die Gerade A ist in jeder Lage eine „Erzeugende" der Umhüllung.

Der Schnitt der bewegten Geraden A mit einer festen Erzeugenden B stellt einen Punkt dar, welcher sich auf B bewegt.

Da B eine Erzeugende ist, so muss es sich ereignen, dass die Erzeugende A, welche die Umhüllung beschreibt, sich der Richtung von B immer mehr zuwendet, mit B zusammenfällt und sich dann wieder von B weg dreht.

In dem Momente des Zusammenfallens der Erzeugenden A und B nimmt der sich bewegende Punkt (AB) eine Lage an, in welcher man ihn als „Berührungspunkt" der Erzeugenden B bezeichnet.

Unmittelbar vor oder nach diesem Momente jedoch befinden sich auf der um b gedrehten Geraden zwei unendlich nahe Curvenpunkte, nämlich der feste Punkt b und der bewegliche Punkt a, welcher noch nicht ganz mit b zusammengefallen ist oder sich schon wieder um eine unendlich kleine Strecke von b entfernt hat.

Die Tangente P des Punktes b kann demnach als Verbindungslinie zweier unendlich naher auf einander folgender Curvenpunkte angesehen werden.

Dadurch erscheint auch jeder Curvenpunkt b als Schnittpunkt zweier auf einander folgender Tangenten, welche nämlich diesen Punkt mit dem nächst vorhergehenden und mit dem nächstfolgenden verbinden.

Wenn man daher die Tangenten einer Curve als Erzeugende einer Umhüllung ansieht, so sind die Berührungspunkte der Erzeugenden durch die Curvenpunkte dargestellt.

Unmittelbar vor oder nach dieser Lage des auf B bewegten Punktes gehen durch denselben zwei in ihrer Richtung unendlich wenig verschiedene Erzeugende, nämlich die feste Erzeugende B und die bewegliche Erzeugende A, welche noch nicht ganz mit A zusammengefallen ist oder sich schon wieder um einen unendlich kleinen Winkel gegen B geneigt hat.

Der Berührungspunkt p der Erzeugenden B kann demnach als Schnittpunkt zweier unendlich naher auf einander folgender Erzeugenden angesehen werden.

Dadurch erscheint auch jede Erzeugende B als Verbindungslinie zweier auf einander folgender Berührungspunkte, welche nämlich durch den Schnitt dieser Erzeugenden mit der nächst vorhergehenden und der nächst folgenden gebildet werden.

Wenn man daher die Berührungspunkte einer Umhüllung als Punkte einer Curve ansieht, so sind die Tangenten der Curvenpunkte durch die Erzeugenden der Umhüllung dargestellt.

Hieraus folgt:

a) Ein bewegter Punkt und eine bewegte Gerade erzeugen gleichartige Gebilde, nämlich eine Curve, welche das erste Mal als Punktgebilde und das zweite Mal als Tangentengebilde auftritt. Eine Tangente kann als Verbindungslinie zweier auf einander folgender Curvenpunkte, ein Curvenpunkt als Schnittpunkt zweier auf einander folgender Tangenten angesehen werden.

Curven, welche das Erzeugniss projectivischer Gebilde sind. § 40.

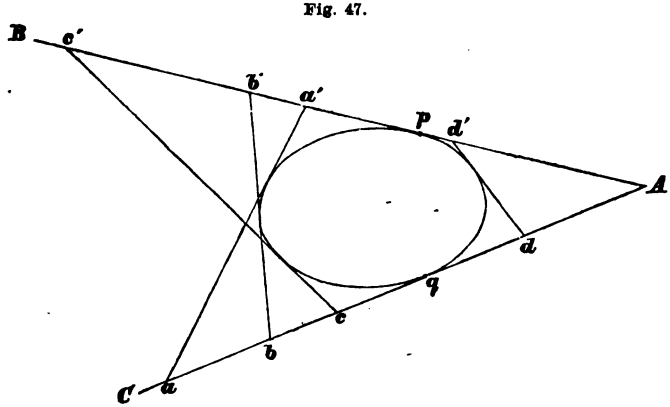
a) Zwei projectivische Punktreihen erzeugen eine Curve, von welcher die Projectionsstrahlen und die Träger der Punktreihen Tangenten sind. Die Berührungspunkte der Träger sind diejenigen Punkte, welche in beiden Punktreihen dem Schnittpunkte der Träger entsprechen.

α) Zwei projectivische Strahlenbüschel erzeugen eine Curve, auf welcher die Projectionspunkte und die Scheitel der Büschel liegen. Die Tangenten in den Scheitelpunkten sind diejenigen Strahlen, welche in beiden Strahlenbüscheln der Verbindungslinie der Scheitel entsprechen.

a) $a, b, c \ldots., a', b', c' \ldots.$ in Fig. 47 seien zwei projectivische Punktreihen auf den Trägern AC und AB. q und p seien diejenigen Punkte, welche in beiden Punktreihen dem Schnittpunkte A der beiden Träger entsprechen.

Man denke sich den Punkt a des Trägers AC in stetiger Bewegung auf dieser Geraden. Der zugehörige Punkt a' des Trägers AB wird ebenfalls in stetiger Weise den Ort der entsprechenden Punkte durchlaufen. Der hierdurch in Bewegung gesetzte Projectionsstrahl wird also eine Curve einhüllen, das heisst

Fig. 47.

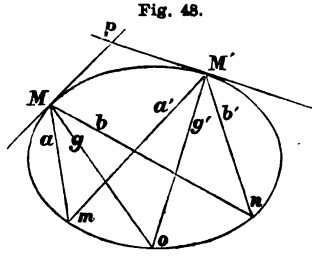


der bewegte Strahl wird in jedem Augenblicke Tangente an eine gewisse Curve sein, deren Punkte durch die Schnittpunkte zweier auf einander folgender Projectionsstrahlen dargestellt sind. Jeder der Träger ist Tangente an die Curve, weil er zugleich als Projectionsstrahl aufgefasst werden kann. Der Träger AB zum Beispiel ist Projectionsstrahl, weil er die entsprechenden Punkte A

und B beider Reihen verbindet. Dass aber p als Schnittpunkt zweier auf einanderfolgender Tangenten der Berührungspunkt von AB ist, erkennt man daraus, dass der gemeinsame Punkt a' der beweglichen Tangente aa' und des Trägers AB zu dem Punkte p wird, sobald der Punkt a sich dem Punkte A und dadurch die Tangete aa' der Tangente AB bis zum Zusammenfallen nähert.

α) M und M' in Fig. 48 seien die Scheitel zweier projectivischer Strahlenbüschel $a, g, b \ldots a', g', b' \ldots$. Mp und $M'p$ seien diejenigen Strahlen, welche in beiden Büscheln der Verbindungslinie ihrer Scheitel entsprechen. Denkt man sich den Strahl a um M in stetiger Bewegung, so durchläuft der Strahl a' die Orte der entsprechenden Strahlen in dem Büschel a', g', b' ebenfalls in stetiger Weise. Der Projectionspunkt m beschreibt hierbei eine ununterbrochene Curve. Die Scheitel der Büschel sind ebenfalls Curvenpunkte, weil sie als Schnittpunkte entsprechender Strahlen angesehen werden können. M' zum Beispiel ist der Schnittpunkt der entsprechenden Strahlen MM' und $M'p$ beider Büschel. Dass aber $M'p$ als Verbindungslinie zweier auf einander folgender Curvenpunkte die Tangente des Punktes M' ist, erkennt man daraus, dass die Sehne $M'm$ zu der Geraden $M'p$ wird, sobald sich der Strahl a dem Strahle MM' und dadurch der Curvenpunkt m dem Curvenpunkt M' bis zum Zusammenfallen nähert.

Fig. 48.



§ 41. Aufgaben.

a) Beliebig viele Tangenten einer durch zwei projectivische Punktreihen erzeugten Curve zu construiren, wenn gegeben sind:

1) Die beiden Träger und drei weitere Tangenten;

2) Die beiden Träger, der Berührungspunkt auf einer derselben und zwei Tangenten;

3) Die beiden Träger, ihre Berührungspunkte und eine Tangente.

α) Beliebig viele Punkte einer durch zwei projectivische Strahlenbüschel erzeugten Curve zu construiren, wenn gegeben sind:

1) Die beiden Scheitel und drei weitere Curvenpunkte;

2) Die beiden Scheitel, die Tangente in einem derselben und zwei Curvenpunkte;

3) Die beiden Scheitel, die Tangenten in denselben und ein Curvenpunkt.

Die Auflösungen folgen aus § 40a und § 37a, § 38a und b.	Die Auflösungen folgen aus § 40α und § 37α, § 38α und β.

Anmerkung. In allen Fällen existirt nur eine Curve, welche den gegebenen Bedingungen genügt (§ 18c).

b) Diejenigen Tangenten einer durch zwei projectivische Punktreihen erzeugten Curve zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt m gehen.	β) Diejenigen Punkte einer durch zwei projectivische Strahlenbüschel erzeugten Curve zu finden, welche auf einer gegebenen Geraden G liegen.
Auflösungen.	
Die beiden Punktreihen werden aus m durch zwei projectivische und concentrische Strahlenbüschel projicirt. Die sich selbst entsprechenden Strahlen der letzteren sind die gesuchten Tangenten (§ 25α).	Die beiden Strahlenbüschel projiciren sich auf G als zwei projectivische Punktreihen desselben Trägers, deren sich selbst entsprechende Punkte die gesuchten Curvenpunkte sind (§ 25a).
c) In der Ebene einer durch zwei projectivische Punktreihen erzeugten Curve Punkte anzugeben, durch welche keine Tangenten der Curve gehen.	γ) In der Ebene einer durch zwei projectivische Strahlenbüschel erzeugten Curve Gerade anzugeben, auf welchen keine Curvenpunkte liegen.

Auflösung c). Wenn AC und AB (Fig. 47) die projectivischen Punktreihen sind, welche die Curve erzeugen und p, q die Berührungspunkte der Träger darstellen, so werden diese Punktreihen aus jedem Punkte m der Geraden pq durch involutorisch liegende Strahlenbüschel projicirt (§ 38c). Wenn der hierdurch gebildete involutorische Strahlenbüschel Doppelstrahlen besitzt, so stellen letztere die durch m gehenden Tangenten der Curve vor (§ 41b). Man denke sich den Punkt m auf der Geraden pq in Bewegung, so dass er von einem Orte innerhalb pq aus sich über den einen Endpunkt p hinaus bewege, so wird bei diesem Uebergange des Punktes m über p hinaus der eine von den beiden involutorisch liegenden Strahlenbüscheln, dessen Scheitel m ist, seinen Drehungssinn wechseln, der andere Büschel jedoch denselben beibehalten. Wenn daher von zwei Punkten m und n der Geraden pq der eine innerhalb, der andere ausserhalb der Strecke pq gelegen ist, so wird von den involutorischen Strahlenbüscheln, deren Scheitel p und q sind, der eine durch gleichlaufende, der andere durch ungleichlaufende projectivische Strahlenbüschel gebildet, welche involutorisch liegen. Durch den einen Punkt gehen

also zwei sich selbst entsprechende Strahlen und durch den andern keine solche (Anmerkung zu § 32b). Einer von diesen beiden Punkten m und n ist also immer ein solcher, durch welchen keine Tangenten der Curve gehen.

γ) In Fig. 48 sind M und M' die Scheitel zweier gleichlaufender projectivischer Strahlenbüschel, welche eine Curve erzeugen. Mp und $M'p$ seien die Tangenten der Curve in den Scheitelpunkten. Auf jedem Strahle G des Punktes p projiciren sich die beiden Strahlenbüschel als zwei involutorisch liegende projectivische Punktreihen. Wenn die dadurch gebildete projectivische Punktreihe Doppelpunkte besitzt, so stellen dieselben die auf der Geraden G liegenden Curvenpunkte dar. Wenn der Strahl G in dem Winkel MpM' gelegen ist, so sind die beiden Punktreihen ungleichlaufend und die involutorische Punktreihe, welche durch dieselben dargestellt wird, enthält zwei Doppelpunkte. Wenn dagegen der Strahl G die Nebenwinkel des Winkels MpM' theilt, so sind jene Punktreihen gleichlaufend und bilden eine involutorische Punktreihe ohne Doppelpunkte. Wenn die beiden Strahlbüschel M und M' ungleichlaufend gewesen wären, so hätte man das umgekehrte Resultat erhalten. Wenn sonach von zwei Strahlen des Punktes p der eine den Winkel MpM' und seinen Scheitelwinkel, der andere die Nebenwinkel dieser Winkel theilt, so liegen immer auf dem einen dieser Strahlen zwei Curvenpunkte und auf dem andern keine solche.

Dritter Cursus.

Projectivische Figuren. Kegelschnitte.

I. Abschnitt.

Perspectivische Figuren.

§ 42. Das ebene System und der Strahlenbündel.

a) Erklärung. Ein ebenes System besteht aus der Gesammtheit aller Punkte und Geraden, welche einer Ebene angehören. Diese Ebene wird

α) Erklärung. Ein Strahlenbündel besteht aus der Gesammtheit aller Strahlen und Ebenen, welche durch einen Punkt gehen. Dieser Punkt

der Träger des ebenen Systems genannt.

b) Alle Punkte eines ebenen Systems, welche auf einer Geraden liegen, bilden eine Punktreihe. (§ 15a.)

c) Alle Gerade eines ebenen Systems, welche durch einen Punkt gehen, hilden einen Strahlenbüschel. (§ 15α.)

wird der Scheitel des Strahlenbündels genannt.

β) Alle Strahlen eines Strahlenbündels, welche in einer Ebene liegen, bilden einen Strahlenbüschel.

γ) Alle Ebenen eines Strahlenbündels, welche durch einen Strahl gehen, bilden einen „Ebenenbüschel." Derjenige Strahl, welcher den Ebenen des Büschels gemeinsam ist, wird Axe des letzteren genannt.

Beziehung des ebenen Systems auf ein Strahlenbündel. § 43.

a) Die Punkte und Geraden eines ebenen Systems werden aus einem Punkte, welcher nicht auf dem Träger des Systems gelegen ist, durch die Strahlen und Ebenen eines Strahlenbündels projicirt. Dabei werden die Punkte einer Punktreihe durch die Strahlen eines Strahlenbüschels projicirt. Die Strahlen eines Strahlenbüschels werden durch die Ebenen eines Ebenenbüschels projicirt.

α) Die Strahlen und Ebenen eines Strahlenbündels projiciren sich auf jede Ebene, welche nicht durch den Scheitel des Bündels geht, als Punkte und Geraden eines ebenen Systems. Dabei projiciren sich die Strahlen eines Strahlenbüschels als Punkte einer Punktreihe. Die Ebenen eines Ebenenbüschels projiciren sich als Strahlen eines Strahlenbüschels.

b) Zusatz. Wenn die Strahlen des Strahlenbüschels unter sich parallel sind, so werden dieselben durch einen Ebenenbüschel projicirt, dessen Axe mit dem Träger des ebenen Systems parallel ist.

β) Zusatz. Wenn die Axe des Ebenenbüschels mit dem Träger des ebenen Systems parallel ist, so projicirt sich derselbe als ein Büschel von Parallelstrahlen.

Beweis. b) Man ziehe durch den Scheitel des Strahlenbündels eine Gerade A, welche mit einem und deshalb mit jedem

Strahle des gegebenen Strahlenbüschels S parallel ist*). Diese Gerade bestimmt mit jedem Strahle von S eine Ebene desjenigen Ebenenbüschels, durch welches der Büschel S projicirt wird. Hiermit ist der Beweis geliefert, dass die Gerade A mit dem Träger des ebenen Systems parallel ist**). Die Behauptung unter β) wird indirect bewiesen, indem man zeigt, dass zwei Strahlen des entstandenen Strahlenbüschels sich nicht schneiden können.

§ 44. Beziehung ebener Systeme auf einander.

Die Strahlen und Ebenen eines Strahlenbündels erzeugen auf zwei Ebenen, welche nicht durch den Scheitel des Strahlenbündels gehen, zwei ebene Systeme. Die beiden ebenen Systeme heissen in Rücksicht auf diese Lage perspectivisch.

a) Erklärung. In perspectivischen ebenen Systemen heissen je zwei Punkte, welche auf einem Strahle des Strahlenbündels liegen, entsprechend oder homolog.

b) Wenn Punkte des einen Systems auf einer Geraden liegen, so liegen die entsprechenden Punkte des andern Systems auf der homologen Geraden.

c) Einer Punktreihe des einen Systems entspricht eine projectivische Punktreihe des andern Systems. Die Träger entsprechender Punktreihen sind homologe Gerade.

α) Erklärung. In perspectivischen Systemen heissen je zwei Gerade, welche auf einer Ebene des Strahlenbündels liegen, entsprechend oder homolog.

β) Wenn Geraden des einen Systems durch einen Punkt gehen, so gehen die entsprechenden Geraden des andern Systems durch den homologen Punkt.

γ) Einem Strahlenbüschel des einen Systems entspricht ein projectivischer Strahlenbüschel des andern Systems. Die Scheitel entsprechender Strahlenbüschel sind homologe Punkte.

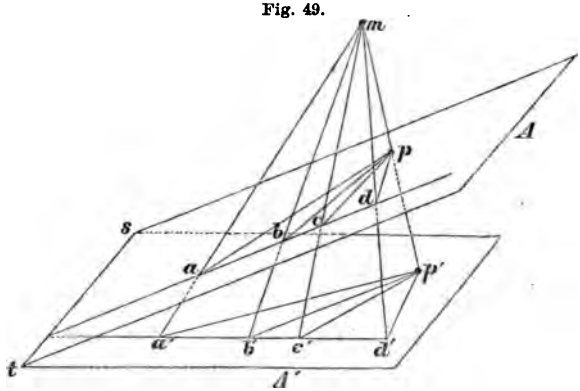
Beweis b) und c). A und A' seien die beiden Ebenen und m der Projectionsmittelpunkt. Die Punkte a, b, c, d . . . einer Punktreihe werden aus m durch die Strahlen eines Strahlenbüschels

*) Nach dem stereometrischen Satze: Wenn zwei Gerade mit einer dritten parallel sind, so sind sie auch unter sich parallel.

**) Stereometrischer Satz: Wenn eine Gerade mit einer Linie der Ebene parallel ist, so ist sie mit der Ebene parallel.

m $(a, b, c, d \ldots)$ projicirt und dieses projicirt sich auf die Ebene A' als eine Punktreihe $a', b', c', d' \ldots$, welche der gegebenen Punktreihe homolog ist (§ 44a). Die beiden Punktreihen sind nach § 16β projectivisch. Ihre Träger sind entsprechende Gerade, weil sie auf der Ebene des Strahlenbüschels m $(a, b, c, d \ldots)$ gelegen sind (§ 44α).

Fig. 49.



β) und γ). Ein Strahlenbüschel S in der Ebene A (Fig. 49), dessen Scheitel der Punkt p ist, wird aus dem Punkte m durch einen Ebenen-Büschel projicirt, welcher mp zur Axe hat. Dieser Ebenenbüschel schneidet die Ebene A' in einen Strahlenbüschel S', welcher zu S homolog ist (§ 44α). Man denke nun den Strahlenbüschel S durch eine Gerade in der Punktreihe $a, b, c \ldots$ geschnitten. Weil irgend ein Punkt a der einen Punktreihe auf einem Strahle von S gelegen ist, so liegt der entsprechende Punkt a' auf dem entsprechenden Strahle von S' (§ 44b). Die beiden Strahlenbüschel S und S' sind also perspectivisch zu den beiden entsprechenden projectivischen (§ 44c) Punktreihen $a\,b\,c \ldots$ und $a'b'c' \ldots$. gelegen und deshalb selbst projectivisch (§ 18a). Die Scheitel p und p' sind homologe Punkte, weil sie beide auf der Axe desjenigen Ebenenbüschels liegen, durch welchen S aus m projicirt wird.

d) Zusatz. Vier harmonischen Punkten des einen Systems entsprechen vier harmonische Punkte des andern. (§ 15.)

e) Einer involutorischen Punktreihe des einen Systems

δ) Zusatz. Vier harmonischen Strahlen des einen Systems entsprechen vier harmonische Strahlen des andern. (§ 15.)

ε) Einem involutorischen Strahlenbüschel des einen Sys-

entspricht eine involutorische Punktreihe des andern.

tems entspricht ein involutorischer Strahlenbüschel des andern.

Beweis *e*). Wenn a, c; b, d ... (Fig. 49) Punktepaare einer involutorischen Reihe sind, so sind ma, mc; mb, md ... Strahlenpaare eines involutorischen Büschels (§ 27 α) und deshalb a', c'; b', d' .... Punktepaare einer involutorischen Reihe (§ 31a). Der Beweis von ε) wird ähnlich geführt.

§ 45. Fortsetzung. — Perspectivische Abbildung ebener Figuren.

a) Denjenigen Punkten, welche auf einer Curve C (§ 39) des einen Systems liegen, entsprechen die Punkte einer Curve C' des andern Systems. Die Curven C und C' heissen ebenfalls entsprechend. Derjenigen Geraden, welche die Curve C in einem ihrer Punkte berührt, entspricht eine Gerade, welche die Curve C' in dem entsprechenden Punkte berührt. Wenn man die Curven C und C' als Tangentengebilde ansieht, so stellen sie entsprechende Umhüllungen beider Systeme dar.

α) Denjenigen Geraden, welche Erzeugende einer Umhüllung U (§ 39) des einen Systems sind, entsprechen die Erzeugenden einer Umhüllung U' des andern Systems. Die Umhüllungen U und U' heissen ebenfalls entsprechend. Dem Berührungspunkte einer Erzeugenden von U entspricht der Berührungspunkt der entsprechenden Erzeugenden von U'. Wenn man die Umhüllungen U und U' als Punktgebilde ansieht, so stellen sie entsprechende Curven beider Systeme dar.

Beweis a). Wenn ein Punkt der einen Ebene sich so bewegt, dass er eine Curve C beschreibt, so muss der ensprechende Punkt der andern Ebene ebenfalls eine Curve C beschreiben, denn wenn C' eine gerade Linie wäre, so müsste auch C eine gerade Linie sein (§ 44b). Derjenigen Sehne, welche zwei beliebige Punkte von C verbindet, entspricht in der andern Figur eine Sehne, welche die entsprechenden Punkte von C' verbindet. Wenn die Endpunkte der Sehne von C' in einen einzigen Punkt p zusammenfallen, so fallen die Endpunkte der entsprechenden Sehne von C' in den entsprechenden Punkt p' zusammen. Die beiden Sehnen werden also zu homologen Tangenten in den entsprechenden Punkten p und p'.

α). Wenn eine Gerade der einen Ebene sich so bewegt, dass sie eine Umhüllung U beschreibt, so muss die entsprechende Gerade der andern Ebene ebenfalls eine Umhüllung U' beschreiben,

denn wäre U' ein Strahlenbüschel, so müsste auch U ein Strahlenbüschel sein (§ 44β). Dem Schnittpunkte zweier Erzeugenden von U entspricht der Schnittpunkt der entsprechenden Erzeugenden von U'. Wenn die beiden Erzeugenden von U in eine einzige G zusammenfallen und dadurch ihr Schnittpunkt in den Berührungspunkt von G übergeht, so fallen die entsprechenden Erzeugenden von U' in die entsprechende Gerade G' und ihr Schnittpunkt in den Berührungspunkt dieser Geraden.

b) Erklärung. Wenn man in dem Einen von zwei perspectivischen Systemen eine Figur gegeben denkt (Originalfigur), so entspricht derselben eine ganz bestimmte Figur (Abbildung) des andern Systems. Die bisherigen Sätze handeln von der Abhängigkeit dieser Figuren von einander. Die Ebenen der Originalfigur und der Abbildung werden auch als Originalebene und Bildebene unterschieden. Die Originalfigur und ihre Abbildung heissen auch perspectivische Figuren.

Der besondere Fall, wo die Träger der perspectivischen Systeme parallel sind. § 46.

a) Wenn die Originalebene mit der Bildebene parallel ist, so sind die perspectivischen Figuren ähnlich. Je zwei entsprechende Gerade sind parallel. Je zwei entsprechende Winkel sind gleich. Entsprechende Punktreihen sind ähnlich und entsprechende Strahlenbüschel sind congruent.

Beweis. Der Parallelismus entsprechender Geraden folgt aus dem stereometrischen Satze: Die Schnittlinien zweier paralleler Ebenen mit einer dritten Ebene sind parallel. Die Gleichheit entsprechender Winkel ergibt sich aus dem stereometrischen Satze: Winkel, deren Schenkel paarweise in gleicher Richtung parallel laufen, sind gleich und von gleichem Sinne. Hieraus schliesst man (I, § 80a) auf die Aehnlichkeit entsprechender Dreiecke, welche von gleichem Sinne sind, weil in ihnen je zwei entsprechende Winkel gleichen Sinnes sind, sowie auf die Aehnlichkeit der perspectivischen Figuren (I, § 86α). Die Aehnlichkeit entsprechender Punktreihen folgt aus § 24α und die Congruenz entsprechender Strahlenbüschel aus der Gleichheit der entsprechenden Winkel.

Die Träger der perspectivischen Systeme sind nicht parallel. § 47.

Wenn die Objectebene und die Bildebene sich in einer Geraden schneiden, so wird dieselbe die Axe der perspectivischen Projection oder Projectionsaxe genannt.

Die folgenden Sätze setzen diesen Fall voraus.

a) Jeder Punkt, welcher auf der Axe der perspectivischen Projection gelegen ist, stellt einen sich selbst entsprechenden Punkt der beiden perspectivischen Systeme dar. (§ 44a.)

b) Die Verbindungslinien entsprechender Punkte in zwei perspectivischen Systemen gehen durch den Projectionsmittelpunkt.

α) Die Axe der perspectivischen Projection stellt eine sich selbst entsprechende Gerade der beiden perspectivischen Systeme dar. (§ 44α.)

β) Je zwei entsprechende Gerade zweier perspectivischer Systeme schneiden sich auf der Axe oder sind mit der Axe parallel.

Der Satz b) folgt direct aus der Definition entsprechender Punkte (§ 44a) und ist nur des dualistischen Entsprechens wegen hier aufgeführt. Um β) zu beweisen bemerke man, dass je zwei entsprechende Gerade der perspectivischen Systeme Schnittlinien von einer durch das Projectionscentrum gehenden Ebene mit den Ebenen jener Systeme sind (§ 44α). Die Axe ist die Schnittlinie der Projectionsebenen selbst. Die Behauptung folgt daher aus dem Satze: Wenn drei Ebenen einander in drei Linien schneiden, so convergiren diese Linien nach einem Punkte oder sie sind einander parallel.

§ 48. Die Gegenaxen zweier perspectivischer Systeme.

a) Aufgabe. Diejenigen Punkte des Systems A zu bestimmen, welche unendlich fernen Punkten der Ebene A' entsprechen.

α) Aufgabe. Diejenigen Punkte des Systems A' zu bestimmen, welche unendlich fernen Punkten in A entsprechen.

Auflösung. Ein unendlich ferner Punkt der Ebene A' wird aus m durch einen Strahl projicirt, welcher mit A' parallel ist.

Alle auf diese Weise erhaltenen Strahlen liegen in einer zu A' parallelen Ebene E*), welche die Ebene A in einer Geraden G schneidet**). Jeder unendlich ferne Punkt von A' entspricht also einem auf G gelegenen Punkte von A und umgekehrt. Auf

*) Nach dem Satze: Alle Geraden, welche durch einen Punkt m parallel zu einer Ebene A' gezogen sind, liegen in einer zu A' parallelen Ebene.

**) Wenn die eine von zwei parallelen Ebenen von einer dritten geschnitten wird, so wird auch die andere geschnitten.

dieselbe Weise findet man in der Ebene A' eine andere Gerade G', deren Punkte den unendlich fernen Punkten von A entsprechen.

b) Erklärung. In jedem von zwei perspectivischen Systemen heisst diejenige Gerade die Gegenaxe des Systems, deren Punkte den unendlich fernen Punkten des andern Systems entsprechen.

Fortsetzung. § 49.

a) Einem Strahlenbüschel der Originalebene, dessen Scheitel auf der Gegenaxe G dieser Ebene gelegen ist, entspricht ein Büschel von Parallelstrahlen in der Bildebene. (§ 44γ, § 48.)

b) Denjenigen Strahlen der Originalebene, welche mit der Gegenaxe G parallel sind, entsprechen Strahlen der Bildebene, welche mit der Gegenaxe G' parallel laufen.

α) Einem Büschel von Parallelstrahlen in der Originalebene entspricht ein Strahlenbüschel der Bildebene, welcher seinen Scheitel auf der Gegenaxe G' dieser Ebene hat. (§ 22b, § 44γ, § 48.)

β) Denjenigen Strahlen der Bildebene, welche mit der Gegenaxe G' parallel sind, entsprechen Strahlen der Originalebene, welche mit der Gegenaxe G parallel laufen.

Beweis zu b) und β). Die Behauptung b) folgt aus a) und α), wenn man den Scheitel des Strahlenbüschels in den unendlich fernen Punkt der Gegenaxe G verlegt. Die Behauptung β) folgt aus α), wenn man den Parallelstrahlen des Büschels die Richtung der Gegenaxe G' gibt. Beide Behauptungen sind übrigens identisch.

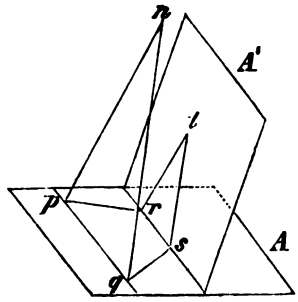
c) Wenn Tangenten an eine Curve der Originalebene sich auf der Gegenaxe G schneiden, so sind die entsprechenden Geraden der Bildebene parallele Tangenten der homologen Curve. (a und § 45a.)

γ) Wenn Tangenten an eine Curve der Originalebene unter sich parallel sind, so stellen die entsprechenden Geraden der Bildebene Tangenten an die homologe Curve dar, welche sich auf der Gegenaxe G' schneiden. (α und § 45a.)

d) Wenn die Punkte $p, q \ldots$ (Fig. 50) die Schnittpunkte von Geraden pr und qs der Originalebene mit der Gegenaxe dieser Ebene sind, so sind die Abbildungen dieser Geraden mit den Projectionsstrahlen $mp, mq \ldots$ der Punkte $p, q \ldots$ parallel.

Beweis. Die Ebene mpq ist mit der Bildebene A' parallel, weil sie die Gegenaxe pq der Originalebene A enthält. Diejenige Ebene mpr, welche die Gerade pr der Originalebene und ihre Abbildung rt enthält, hat mit der Ebene mpq die Gerade mp und mit der Ebene A' die Abbildung rt gemein. Die Behauptung folgt also aus dem Parallelismus der Ebenen mpq und A' nach dem Satze: Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten werden, so sind ihre Durchschnitte parallel.

Fig. 50.



e) Zusatz. Die Abbildungen zweier Geraden der Originalebene, welche die Gegenaxe G in p und q treffen, bilden einen Winkel, welcher dem Winkel pmq der Projectionsstrahlen mp und mq gleich ist.

§ 50. Uebungen.

1) Welche besonderen Eigenschaften haben perspectivische Figuren, wenn ihre Träger sich schneiden, ihre Projectionsstrahlen aber parallel sind (der Projectionsmittelpunkt unendlich fern ist)?

Andeutung. Zwei homologe Punktreihen sind ähnlich und je zwei entsprechende Strecken derselben bilden das gleiche Verhältniss. Der Werth dieses Verhältnisses ändert sich jedoch von einem Paare entsprechender Geraden zu dem andern. Entsprechende Winkel sind im Allgemeinen nicht gleich (Affine Figuren).

2) Wie muss die gemeinsame Richtung der Projectionsstrahlen gewählt werden, wenn die Figuren in 1) congruent sein sollen (zwei Auflösungen).

3) Perspectivische Figuren auf parallelen Trägern sind ähnlich (§ 46 a). Wo muss der Projectionsmittelpunkt liegen, wenn diese Aehnlichkeit in Congruenz übergehen soll (zwei Auflösungen)?

4) Können zwei perspectivische Figuren congruent sein, wenn ihre Projectionsaxe und das Projectionscentrum im endlichen Raume liegen?

5) abc und $a'b'c'$ seien zwei in verschiedenen Ebenen gelegene Dreiecke E und E', deren Ecken und Seiten paarweise entsprechend gedacht werden. Man beweise die beiden Sätze:

α) Wenn je zwei entsprechende Seiten der Dreiecke, beziehungsweise ihre Verlängerungen, sich in einem Punkte der Schnittlinie von E und E' treffen, so gehen die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch einen Punkt.

β) Wenn die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch einen Punkt gehen, so treffen sich je zwei entsprechende Seiten in einem Punkte der Schnittlinie von E und E'.

Andeutung. Die beiden Dreiecke können als entsprechende Figuren perspectivischer Systeme betrachtet werden. Im Falle α) bestimmen die drei Ebenen, welche durch je zwei entsprechende Seiten gelegt werden, den Projectionsmittelpunkt.

6) Wenn man die eine von zwei perspectivischen Figuren mit ihrem Träger um die Axe dreht, so gehen fortwährend die Projectionsstrahlen durch einen Punkt, — die Figuren befinden sich fortwährend in perspectivischer Lage. (5.)

7) Die Behauptung in 6) gilt auch dann noch, wenn der eine Träger soweit gedreht worden ist, dass derselbe mit dem andern zusammenfällt. Der Projectionsmittelpunkt fällt alsdann in den gemeinschaftlichen Träger der beiden perspectivischen Figuren (§ 26, 10).

8) Wenn zwei perspectivische Figuren in derselben Ebene liegen, so fallen α) in dem Projectionsmittelpunkte zwei entsprechende Punkte zusammen (7). β) Ausser in dem Projectionsmittelpunkte und in den Punkten der Axe kann kein Punkt des einen Systems mit dem entsprechenden zusammenfallen.

Andeutung zu β). Sonst wären die Figuren congruent. Um dies zu beweisen, zeige man zunächst, dass je zwei entsprechende und concentrische Strahlenbüschel, welche ihren Scheitel in der Axe haben, sich decken müssten.

9) Wenn zwei perspectivische Systeme in derselben Ebene liegen, so entspricht jede durch das Projectionscentrum gezogene Gerade sich selbst.

10) Zwei perspectivische Systeme auf verschiedenen Trägern sind bestimmt, wenn diese Träger und zwei Paare entsprechender Punkte, welche in einer Ebene liegen, gegeben sind.

11) Zwei perspectivische Systeme auf derselben Ebene anzugeben, wenn eine Gerade G dieser Ebene die Projectionsaxe sein soll und ausserdem der Projectionsmittelpunkt m, sowie zwei entsprechende Punkte a und a' auf einer durch m gehenden Geraden gegeben sind.

Andeutung. In dem Projectionsmittelpunkte fallen zwei entsprechende Punkte zusammen. Wenn man daher das eine System auf seinem Träger um die Axe dreht, so sind nach 10) zwei perspectivische Systeme bestimmt, welche die gesuchten sind. Durch Zurückdrehen des einen Trägers kommen dieselben in die verlangte Lage, in welcher m der Projectionsmittelpunkt ist (8β).

12) In den perspectivischen Systemen von 11) zu jedem Punkte b des einen Systems den entsprechenden zu suchen.

Andeutung. Nach dem Schnittpunkte p der Axe und der Geraden ab ziehe man die Gerade $a'p$. Der Schnittpunkt von $a'p$ und bm ist der gesuchte Punkt b'.

13) In den perspectivischen Systemen von 11) zu jeder Geraden des einen Systems die entsprechende zu suchen (12).

14) Wenn zwei perspectivische Systeme in derselben Ebene liegen, so sind die Gegenaxen mit der Projectionsaxe parallel und das Centrum ist von der einen Gegenaxe ebensoweit entfernt als die Projectionsaxe von der andern (§ 26, 21 und § 48).

15) Zwei perspectivische Systeme derselben Ebene sind durch die

Richtung der Projectionsaxe und zwei Paare entsprechender Punkte bestimmt; man soll den Projectionsmittelpunkt und die Axe finden.

16) Zwei perspectivische Systeme derselben Ebene sind durch den Projectionsmittelpunkt, ein Paar entsprechender Punkte auf einem Projectionsstrahle und ein Paar entsprechender Geraden bestimmt. Man soll die Projectionsaxe finden (§ 26, 6β).

17) Zwei perspectivische Systeme derselben Ebene sind durch das Projectionscentrum und die beiden Gegenaxen bestimmt. Man soll die Projectionsaxe finden (14).

18) Zwei Kreise K und K' seien gegeben. Je zwei Punkte und je zwei Tangenten, welche in Beziehung auf einen Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise invers sind (I, § 104), stellen zugeordnete Elemente zweier perspectivischer Systeme dar. Der Aehnlichkeitspunkt ist das Projectionscentrum und die Potenzlinie der Kreise ist die Projectionsaxe beider Systeme.

19) In einer Ebene ist ein Kreis K und ein Punkt p gegeben. Durch p einen Kreis K' so zu ziehen, dass ein gegebener Punkt Aehnlichkeitspunkt und eine gegebene Gerade Potenzlinie der beiden Kreise ist.

20) Wenn bei zwei perspectivischen Systemen derselben Ebene die Gegenaxen in eine Gerade zusammenfallen, so halbirt diese den Abstand zwischen dem Centrum und der Projectionsaxe (14).

21) Wenn bei zwei perspectivischen Systemen derselben Ebene die Gegenaxen zusammenfallen, so bilden

α) die auf demselben Projectionsstrahle gelegenen Paare entsprechender Punkte eine involutorische Reihe und

β) die durch denselben Punkt der Projectionsaxe gezogenen Paare entsprechender Geraden einen involutorischen Strahlenbüschel.

Andeutung. α) folgt aus § 32b. Um β) zu beweisen schneide man die Paare entsprechender Strahlen durch einen Projectionsstrahl und wende α) und § 27α an.

22) Wenn zwei perspectivische Systeme S und S' die Eigenschaft 21) haben, so entsprechen sich

α) je zwei homologe Punkte auf doppelte Weise, das heisst, wenn dem Punkte a in S der Punkt a' in S' entspricht, so entspricht auch dem Punkte a', als Punkt von S betrachtet, der Punkt a in S' (§ 30).

β) Auch je zwei homologe Gerade entsprechen sich doppelt (§ 30).

Anmerkung. Zwei perspectivische Figuren dieser Art bilden ein sogenanntes involutorisches System. Entsprechende Punkte oder Geraden werden auch zugeordnet genannt.

23) Ein involutorisches System ist durch das Projectionscentrum und die Projectionsaxe bestimmt.

Andeutung. Auf jedem Projectionsstrahle bilden der Schnittpunkt derselben mit der Axe und der Projectionsmittelpunkt die Doppelpunkte der in 21α erwähnten involutorischen Reihe, welche hierdurch bestimmt ist.

24) In dem Falle 23) soll man

α) zu jedem Punkte den zugeordneten Punkt (§ 13d) und

β) zu jeder Geraden die zugeordnete Gerade ziehen (§ 13δ).

25) Das Centrum und die Axe eines involutorischen Systems zu bestimmen, wenn gegeben sind

α) zwei Paare zugeordneter Punkte,

β) zwei Paare zugeordneter Strahlen.

26) Wenn man in der Ebene eines Kreises einen Punkt p als Centrum und seine Polare P als Axe eines involutorischen Systemes annimmt, so sind

α) je zwei Schnittpunkte des Kreises mit einer durch p gezogenen Geraden zugeordnete Punkte (§ 36b),

β) je zwei Tangenten des Kreises, welche durch einen Punkt von P gezogen sind, zugeordnete Geraden (§ 36β).

27) Einen Kreis so zu zeichnen, dass ein gegebener Punkt p Pol der Geraden P sein soll, wenn zugleich

α) der Kreis durch einen Punkt m gehen soll,

β) der Kreis eine gegebene Gerade berühren soll.

II. Abschnitt.

Kegelschnitte. — Identität derselben mit den Erzeugnissen projectivischer Gebilde.

Kegelschnitte. § 51.

Erklärung. Die Punkte eines Kreises werden aus einem Punkte, welcher nicht auf seiner Ebene gelegen ist, durch Strahlen projicirt, welche eine krumme Oberfläche bilden Diese Oberfläche heisst ein Kreiskegel. Die Projectionsstrahlen der Kreispunkte heissen die Seiten des Kegels und der angenommene Projectionsmittelpunkt ist seine Spitze.

Jede Ebene, welche nicht durch die Spitze des Kegels geht, schneidet die Oberfläche desselben in einer krummen Linie, welche ein Kegelschnitt genannt wird.

Folgerungen.

a) Jede perspectivische Abbildung eines Kreises kann als Schnittfigur eines Kreiskegels mit einer Ebene, d. h. als Kegelschnitt betrachtet werden.

α) Jede Schnittfigur eines Kreiskegels mit einer Ebene (welche nicht durch die Spitze geht) d. h. jeder Kegelschnitt ist eine perspectivische Abbildung eines Kreises.

b) Ein Kegelschnitt theilt die Ebene in zwei Theile.

Aus den Punkten des einen (äusserer Raum) lassen sich

Diejenigen Geraden, welche ganz in dem äussern Raume

zwei Tangenten an den Kegelschnitt legen. Aus den Punkten des andern (innerer Raum) lassen sich keine Tangenten an den Kegelschnitt legen.

Von keinem Punkte aus lassen sich mehr als zwei Tangenten an einen Kreis legen. (§ 51α, § 45a.)

verlaufen, treffen den Kegelschnitt nicht. Diejenigen Geraden, welche in den innern Raum reichen, treffen den Kegelschnitt in zwei Punkten.

Keine Gerade kann den Kegelschnitt in mehr als zwei Punkten treffen. (§ 51α, § 45a.)

§ 52. Identität der Kegelschnitte mit den Erzeugnissen projectivischer Gebilde.

a) Die Punkte eines Kegelschnitts werden aus zwei beliebigen derselben durch projectivische Strahlenbüschel projicirt.

α) Die Tangenten eines Kegelschnitts schneiden zwei beliebige derselben in projectivischen Punktreihen.

Beweis. *a*) Ein Kegelschnitt ist die perspectivische Abbildung eines Kreises. Wenn $p', q', a', b', c' \ldots$ Punkte des Kegelschnitts sind, so sind die Strahlenbüschel p' $(a', b', c' \ldots)$ und q' $(a', b', c' \ldots)$ mit den entsprechenden Strahlenbüscheln p $(a, b, c \ldots)$ und q $(a, b, c \ldots)$ der Originalfigur bezüglich projectivisch (§ 44γ). Die beiden letztern Strahlenbüschel sind aber nach § 21 a unter einander projectivisch, weil die Punkte $p, q, a, b, c \ldots$ der Annahme nach auf einem Kreise liegen. Man schliesst also aus § 18a, dass die Punktreihen p' $(a', b', c' \ldots)$ und q' $(a', b', c' \ldots)$ ebenfalls projectivisch sind.

α) Man denke sich wiederum den gegebenen Kegelschnitt als die perspectivische Abbildung eines Kreises. Wenn die Tangenten P' und Q' des Kegelschnitts von den Tangenten $A', B', C' \ldots$ bezüglich in den Punktreihen $a', b', c' \ldots$ und $\alpha', \beta', \gamma' \ldots$ geschnitten werden, so sind diese Punktreihen mit den entsprechenden $a, b, c \ldots$ und $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ der Originalfigur projectivisch. Die Geraden P, Q der Originalfigur, welche von den Geraden $A, B, C \ldots$ derselben in diesen Punktreihen geschnitten werden, sind aber nach § 45a Tangenten eines Kreises. Die Punktreihen $a, b, c \ldots$ und $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ sind also nach § 21α unter sich projectivisch. Man schliesst also aus § 18a, dass auch die Punktreihen $a', b', c' \ldots$, $\alpha', \beta', \gamma' \ldots$ projectivisch sind.

b) Jede Curve, welche das Erzeugniss zweier projectivischer Strahlenbüschel ist,

β) Jede Curve, welche das Erzeugniss projectivischer Punktreihen ist, kann als per-

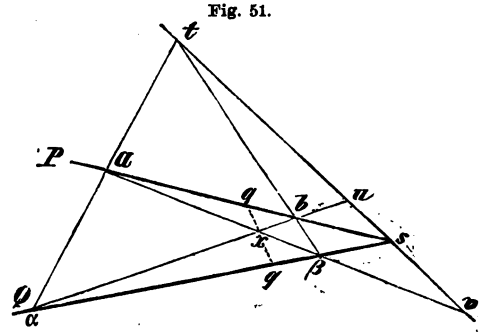
kann als perspectivische Abbildung eines Kreises angesehen werden, das heisst, sie ist ein Kegelschnitt.

spectivische Abbildung eines Kreises angesehen werden, das heisst, sie ist ein Kegelschnitt.

Beweis. b) Man ziehe in der Ebene A der gegebenen Curve C irgend eine Gerade G, welche die letztere nicht schneidet (§ 41γ). Die beiden projectivischen Strahlenbüschel, welche die Curve C erzeugen und mit P und Q bezeichnet werden sollen, treffen diese Gerade in zwei projectivischen Punktreihen $a, b, c \ldots$ und $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, welche keine entsprechenden Punkte gemeinsam haben (§ 41β). Man lege nun durch G eine weitere Ebene E und suche in derselben einen Punkt m, von welchem aus die projectivischen Punktreihen $a, b, c \ldots$ und $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ durch zwei congruente Strahlenbüschel (gleichen Sinnes) projicirt werden (§ 25c). Von dem Punkte m als Projectionscentrum projicire man nun die Originalfigur der Ebene A auf eine zu E parallele Ebene A'. G wird dann die Gegenaxe der Originalfigur sein (§ 48). Nach § 49d werden nun die Strahlenbüschel P und Q auf der Ebene A' durch zwei Strahlenbüschel P' und Q' abgebildet, welche mit den Strahlenbüscheln $m\,(a, b, c \ldots)$ und $m\,(\alpha, \beta, \gamma \ldots)$ bezüglich congruent und von gleichem Sinne sind. Die Strahlenbüschel P' und Q' sind deshalb auch congruent und von gleichem Sinne und schneiden sich (Anmerkung zu § 21a) auf einem Kreise, welcher die perspectivische Abbildung der Curve C ist.

β) Die Geraden P, Q einer Ebene A (Fig. 51) seien die Träger zweier projectivischer Punktreihen $a, b, c, d \ldots$ und $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$, deren Projectionsstrahlen $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma \ldots$ die gegebene Curve C einhüllen. p, q seien diejenigen Punkte, welche dem Schnittpunkte s der Träger in beiden Punktreihen entsprechen. Man wähle auf der Geraden pq einen Punkt x, durch welchen keine Tangenten an die Curve C gelegt werden können (§ 41c). Die beiden projectivischen Punktreihen auf P und Q werden nach § 38c aus dem Punkte x durch einen involutorischen Strahlenbüschel ohne Doppelstrahlen projicirt. Je zwei zugeordnete Strahlen $a\beta$ und

Fig. 51.



ab sind die Diagonalen eines der Curve C umbeschriebenen Vierecks $a\alpha\ \beta b$. Von diesem involutorischen Strahlenbüschel wird die Gerade G, welche den Schnittpunkt s von P und Q mit dem Schnittpunkte t von $a\alpha$ und $b\beta$ verbindet, in einer involutorischen Punktreihe geschnitten, welche keine Doppelpunkte hat. Durch G lege man nun eine Ebene E und bestimme in derselben einen Punkt m, aus welchem die Punktepaare der involutorischen Reihe unter rechten Winkeln projicirt werden (Anmerkung zu § 28). Aus m projicire man die Originalfigur der Ebene A auf eine mit E parallele Ebene A'. G ist alsdann die Gegenaxe der Originalfigur (§ 48). Der involutorische Strahlenbüschel x wird als ein involutorischer Strahlenbüschel x' abgebildet, in welchem je zwei zugeordnete Strahlen senkrecht auf einander stehen (§ 44 ε, § 49 d).

Die Abbildung $a'\alpha'\beta'b'$ des Vierecks $a\alpha\beta b$ ist also ein Viereck, in welchem die Diagonalen $a'\beta'$ und $\alpha'b'$ als zugeordnete Strahlen des involutorischen Strahlenbüschels x' senkrecht auf einander stehen. Da ausserdem die gegenüberliegenden Seiten dieses Vierecks $a'\alpha'\beta'b'$ nach § 49 a parallel sind, so muss dasselbe ein Rhombus sein. Auf dieselbe Weise führt jedes andere Paar zugeordneter Strahlen in dem involutorischen Büschel x' zu einem Rhombus. Diese Rhomben sind alle der Abbildung C' von der gegebenen Curve C umbeschrieben; sie haben ferner ihren Mittelpunkt in dem Punkte x' und zwei gegenüberliegende Seiten liegen in den Abbildungen $a'b'$ und $\alpha'\beta'$ der Träger ab und $\alpha\beta$.

Denkt man sich daher denjenigen Kreis coustruirt, welcher die Seiten des Rhombus $a'\alpha'\ \beta'\ b'$ berührt, so sind auch alle andern Rhomben diesem Kreise umbeschrieben, woraus sich ergibt, dass die Curve C mit demselben identisch ist.

§ 53. Bestimmung eines Kegelschnittes durch fünf Bedingungen.

a) Diejenigen Stücke, welche in einem der drei folgenden Fälle aufgezählt sind, bestimmen jedesmal einen einzigen Kegelschnitt.

1) Fünf Tangenten.

2) Vier Tangenten und der Berührungspunkt auf einer derselben.

α) Diejenigen Stücke, welche in einem der drei folgenden Fälle aufgezählt sind, bestimmen jedesmal einen einzigen Kegelschnitt.

1) Fünf Punkte des Kegelschnitts.

2) Vier Punkte und die Tangente in einem derselben.

3) Drei Tangenten und die Berührungspunkte auf zweien derselben.	3) Drei Punkte und die Tangenten in zweien derselben.

Beweise.

Da die Kegelschnitte, welche diesen Bedingungen genügen sollen, Erzeugnisse projectivischer Punktreihen sind (§ 52 α), so folgt die Behauptung aus § 41 a und Anmerkung.	Da die Kegelschnitte, welche diesen Bedingungen genügen sollen, Erzeugnisse projectivischer Strahlenbüschel sind (§ 52 a), so folgt die Behauptung aus § 41 α und Anmerkung.

Uebungen. § 54.

1) In welchem Falle wird das Erzeugniss projectivischer Strahlenbüschel, welches im Allgemeinen ein Kegelschnitt ist, durch die Punkte zweier geraden Linien dargestellt?

2) In welchem Falle wird das Erzeugniss projectivischer Punktreihen, welches im Allgemeinen ein Kegelschnitt ist, durch diejenigen Geraden dargestellt, welche durch einen von zwei Punkten gehen?

3) Wenn eine Curve das Erzeugniss zweier projectivischer Strahlenbüschel ist, so werden zwei beliebige ihrer Tangenten von den übrigen Tangenten der Curve in den entsprechenden Punkten zweier projectivischer Punktreihen geschnitten (§ 52 b und a).

4) Wenn eine Curve das Erzeugniss zweier projectivischer Punktreihen ist, so werden die Punkte derselben aus zwei beliebigen Punkten der Curve durch zwei projectivische Strahlenbüschel projicirt (§ 52 β und α).

5) Wenn man durch einen Punkt eines Kegelschnitts 4 harmonische Strahlen zieht, so bestimmen dieselben auf dem Kegelschnitt 4 Punkte, welche durch ihre Verbindung mit jedem weitern Curvenpunkte 4 harmonische Strahlen liefern.

6) Wie heisst der dualistisch zugeordnete Satz?

7) Zwei projectivische und concentrische Strahlenbüschel, deren gemeinsamer Scheitel auf einem Kegelschnitt liegt, bestimmen Punktepaare des Kegelschnitts, welche aus jedem Curvenpunkte durch die entsprechenden Strahlen zweier projectivischer Strahlenbüschel projicirt werden.

8) Wie heisst der dualistisch zugeordnete Satz?

9) Ein involutorischer Strahlenbüschel, dessen Scheitel auf dem Kegelschnitt liegt, bestimmt auf der Curve Punktepaare, welche aus jedem Punkte derselben durch einen involutorischen Strahlenbüschel projicirt werden.

10) Wie heisst der dualistisch zugeordnete Satz?

11) Wenn man auf einer Geraden die Schnittpunkte mit einem Kegelschnitt und die Schnittpunkte mit je zwei Gegenseiten eines dem Kegelschnitt einbeschriebenen vollständigen Vierecks bestimmt, so erhält man 4 Punktepaare einer involutorischen Reihe.

Andeutung. m, n seien die Schnittpunkte einer Geraden G mit dem Kegelschnitt K und a, a'; b, b'; c, c' die drei Paare von Schnittpunkten der Geraden G mit den Gegenseiten eines einbeschriebenen vollständigen Vierecks. Man wähle eine der Viereckseiten, welche durch die Punkte a, a' gehen. Die auf dieser Seite liegenden beiden Eckpunkte des Vierecks und die Punkte m, n projicire man nach einander aus den beiden noch übrigen Ecken auf die Gerade G, wodurch man findet, dass die Punktgruppen m, n, c, b' und m, n, b, c' projectivisch sind (§ 52a, § 16α, § 18a).

Nach § 33, 1 sind aber auch m, n, c, b' und n, m, b', c projectivisch, woraus die Projectivität von m, n, b, c' und n, m, b', c folgt. Nunmehr ergibt sich die Behauptung aus § 30b.

12) Man soll den dualistisch zugeordneten Satz aussprechen und beweisen.

13) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, welcher durch 4 Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt (zwei Auflösungen).

Andeutung. Die Kegelschnitte, welche durch 4 Punkte gehen, erzeugen auf der gegebenen Geraden eine involutorische Punktreihe (11). Die etwa vorhandenen Doppelpunkte der Reihe sind Berührungspunkte von Kegelschnitten, welche die gegebene Bedingung erfüllen.

14) Wieviele von denjenigen Kegelschnitten, welche durch 4 gegebene Punkte gehen, zerfallen in zwei Gerade (1)?

15) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, welcher durch drei Punkte a, b, c geht, in c die Gerade C und ausserdem eine Gerade G berührt, welche durch keinen der gegebenen Punkte geht (zwei Auflösungen).

Andeutung. Ein specieller Fall von 13), in welchem zwei der gegebenen Punkte unendlich nahe liegen. Die Linienpaare ab und C, ac und bc bestimmen auf G die in Betracht kommende involutorische Reihe.

16) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, welcher 4 gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht (zwei Auflösungen).

17) Wieviele derjenigen Kegelschnitte, welche 4 gegebene Gerade berühren, zerfallen in zwei Punkte (2)?

18) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, welcher drei Gerade A, B, C zu Tangenten hat, wenn ausserdem a der Berührungspunkt von A ist und die Curve durch einen weitern Punkt m gehen soll, welcher auf keiner der 3 gegebenen Geraden liegt (zwei Auflösungen).

19) Wenn in einer Ebene zwei perspectivische Figuren liegen (§ 45b), so entspricht

α) einer durch zwei projectivische Strahlenbüschel erzeugten Curve (§ 40) der einen Figur eine ebensolche Figur in der andern,

β) einer durch zwei projectivische Punktreihen erzeugten Curve (§ 40) der einen Figur eine ebensolche Curve der andern.

20) Wenn in derselben Ebene zwei perspectivische Systeme liegen, so entsprechen den Punkten und Tangenten eines Kegelschnitts der einen Figur die Punkte und Tangenten eines Kegelschnitts der andern.

21) Wenn zwei Kegelschnitte K und K' einer Ebene entsprechende Curven perspectivischer Systeme sind, so liegen auf

α) homologen Geraden gleichzeitig zwei Punkte von K und K' oder ein solcher oder keiner und es gehen

β) durch homologe Punkte gleichzeitig zwei Tangenten von K und K' oder eine solche oder keine.

22) Wenn zwei Kegelschnitte K und K' einer Ebene entsprechende Curven perspectivischer Systeme sind, so sind

α) die Schnittpunkte a und b von K mit der Projectionsaxe gemeinschaftliche Punkte von K und K' und

β) die von dem Projectionsmittelpunkt an K gezogenen Tangenten A und B sind gemeinschaftliche Tangenten von K und K'.

γ) Die gemeinschaftliche Sehne ab hat gegen K und K' gleichartige Lage, d. h. von jedem Punkte derselben können entweder an beide Kegelschnitte oder an keinen derselben Tangenten gezogen werden (21).

δ) Der durch A und B gebildete gemeinschaftliche Tangentenwinkel hat gegen K und K' gleichartige Lage, d. h. jede durch den Schnittpunkt von A und B gezogene Gerade trifft entweder beide Kegelschnitte oder keinen derselben (21).

Vierter Cursus.

Eigenschaften der Kegelschnitte. Identität derselben mit den Curven des ersten Cursus.

I. Abschnitt.

Figuren, welche einem Kegelschnitt einbeschrieben oder umbeschrieben sind.

Sätze von Pascal und Brianchon. § 55.

a) In jedem Sechseck, welches einem Kegelschnitt umbeschrieben ist, schneiden sich die drei Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken in einem Punkte. (Satz des Brianchon.)

α) In jedem Sechseck, welches einem Kegelschnitt einbeschrieben ist, liegen die drei Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden. (Satz des Pascal.)

Beweise.

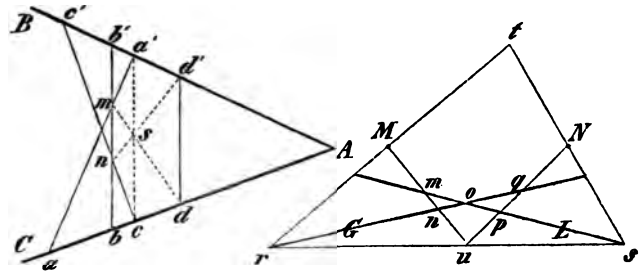
Die Seiten eines solchen Sechsecks sind Tangenten an den Kegelschnitt. Vier derselben aa', bb', cc', dd' (Fig. 52) schneiden die beiden übrigen AC und AB in entsprechenden Punkten zweier

Die Eckpunkte eines solchen Sechsecks sind Punkte des Kegelschnitts. Vier derselben q, o, m, t (Fig. 53) werden aus den beiden übrigen M und N durch entsprechende Strahlen zweier

projectivischer Punktreihen. Nach der Anmerkung zu 37a schneiden sich in dem Sechseck $nma'd'dc$ und in allen Sechsecken, welche hieraus durch Vertauschung der Projectionsstrahlen unter einander

projectivischer Strahlenbüschel projicirt. Nach der Anmerkung zu § 37α liegen in dem Sechseck $MtNqom$ und in allen Sechsecken, welche hieraus durch Vertauschung der Punkte q, o, m, t

Fig. 52 u. 53.



entstehen, die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken in einem Punkte.

Nach § 52α kann man aber auch die Tangenten AC und AB mit den übrigen vertauschen, so dass alle Sechsecke, welche die gegebenen Tangenten zu Seiten haben, die angegebene Eigenschaft besitzen.

b) In jedem Fünfeck, welches einem Kegelschnitt umbeschrieben ist, geht die Verbindungslinie eines Eckpunktes mit dem Berührungspunkte der gegenüberliegenden Seite durch den Schnittpunkt der beiden Diagonalen, welche die übrigen Eckpunkte verbinden.

unter einander entstehen, die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden.

Nach § 52a kann man aber auch die Punkte M und N mit den übrigen vertauschen, so dass alle Sechsecke, welche die gegebenen Punkte zu Ecken haben, die angegebene Eigenschaft besitzen.

β) In jedem Fünfeck, welches einem Kegelschnitt einbeschrieben ist, liegt der Schnittpunkt einer Seite mit der Tangente des gegenüberliegenden Eckpunktes auf einer Geraden mit den Schnittpunkten von je zwei andern nicht einander anliegenden Fünfeckseiten.

Beweise.

Man kann den Beweis durch die Anmerkung zu § 38a und § 52α führen. Wenn man sich jedoch vorstellt, dass in einem

Man kann den Beweis durch die Anmerkung zu § 38α und § 52a führen. Wenn man sich jedoch vorstellt, dass in einem

dem Kegelschnitt umbeschriebenen Sechseck zwei auf einanderfolgende Seiten in eine Tangente zusammenfallen und somit das durch ihren Schnittpunkt gebildete Eck in den Berührungspunkt jener Tangente fällt (§ 39a), so folgt der Satz unmittelbar aus a).

c) In jedem Viereck, welches einem Kegelschnitt umbeschrieben ist, gehen diejenigen Geraden, welche die Berührungspunkte gegenüberliegender Seiten verbinden, durch den Schnittpunkt der Diagonalen.

dem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechseck zwei auf einanderfolgende Ecken in einen Punkt zusammenfallen und somit die zwischen denselben liegende Seite zur Tangente in jenem Punkte wird (§ 39a), so folgt der Satz unmittelbar aus α).

γ) In jedem Viereck, welches einem Kegelschnitt einbeschrieben ist, schneiden sich die Tangenten gegenüberliegender Eckpunkte auf derjenigen Geraden, welche durch die beiden Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten bestimmt sind.

Beweise.

Man kann diesen Satz durch die Anmerkung zu § 38b und § 52α beweisen. Derselbe ergibt sich jedoch unmittelbar aus b), wenn man zwei aufeinanderfolgende Seiten des Fünfecks in dieselbe Tangente des Kegelschnitts zusammenfallen lässt.

d) In jedem Dreieck, welches einem Kegelschnitt umbeschrieben ist, schneiden sich die Geraden, welche die Ecken des Dreiecks mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, in einem Punkte.

Der Beweis ergibt sich aus a), wenn man drei mal je zwei auf einanderfolgende Seiten des Sechsecks in dieselbe Tangente des Kegelschnitts zusammenfallen lässt. Drei Ecken des Sechsecks gehen alsdann in die Eckpunkte

Man kann diesen Satz durch die Anmerkung zu § 38β und § 52a beweisen. Derselbe ergibt sich jedoch unmittelbar aus β), wenn man zwei aufeinanderfolgende Ecken in denselben Punkt des Kegelschnitts zusammenfallen lässt.

δ) In jedem Dreieck, welches einem Kegelschnitt einbeschrieben ist, liegen die Punkte, in welchen die Seiten des Dreiecks von den Tangenten der gegenüberliegenden Ecken geschnitten werden, auf einer Geraden

Der Beweis ergibt sich aus α), wenn man drei mal je zwei auf einander folgende Ecken des Sechsecks in denselben Punkt des Kegelschnitts zusammenfallen lässt. Drei Seiten des Sechsecks gehen alsdann in die Seiten des

des durch diese Tangenten gebildeten Dreiecks über, während die übrigen Ecken in die Berührungspunkte der Dreieckseiten mit dem Kegelschnitt fallen.

durch diese Punkte gebildeten Dreiecks über, während die übrigen Seiten in die Tangenten des Kegelschnitts an die Ecken des Dreiecks fallen.

§ 56. Aufgaben.

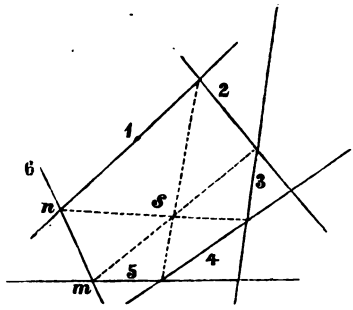
a) Auf der einen von 5 Tangenten, welche einen Kegelschnitt bestimmen, ist ein Punkt gegeben. Man soll die zweite Tangente finden, welche durch diesen Punkt geht.

α) Durch den einen von 5 Punkten, welche einen Kegelschnitt bestimmen, ist eine Gerade gezogen. Man soll ihren zweiten Schnittpunkt mit der Curve finden.

Auflösungen.

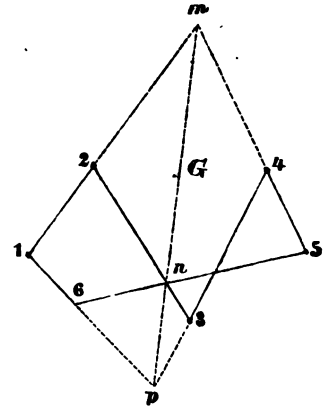
a) (Fig. 54.) Es seien die Tangenten 1, 2 . . 5 gegeben und auf der letzten derselben ein Punkt m, durch welchen noch eine 6te Tangente an die Curve gelegt werden soll. Die Tangenten bilden in dieser Aufeinanderfolge die Seiten eines umbeschriebenen Sechsecks. Die gegenübenliegenden Ecken (1, 2) und (4, 5), (2, 3) und m bestimmen durch ihre Verbindungslinien den Punkt s. Der 6te

Fig. 54.



α) (Fig. 55.) Es seien die Punkte 1, 2, . . 5 gegeben und durch den letzten derselben eine Gerade (5, n) gezogen, auf der ein 6ter Curvenpunkt gesucht werden soll. Die 6 Punkte bilden in dieser Aufeinanderfolge die Ecken eines einbeschriebenen 6 Ecks. Die gegenüberliegenden Seiten (1, 2) und (4, 5), (2, 3) und (5, n) bestimmen durch ihre Schnittpunkte eine Gerade G. Der Schnittpunkt der Seite (3, 4)

Fig. 55.



Eckpunkt des umbeschriebenen 6 Ecks muss auf derjenigen Geraden liegen, welche s mit dem Schnittpunkt (3,4) verbindet. Hiermit ist die zweite durch m gehende Tangente mn gefunden.

b) Ein Kegelschnitt sei durch 5 Tangenten bestimmt; man soll auf einer dieser Tangenten den Berührungspunkt finden (§ 55b).

c) Ein Kegelschnitt sei durch 4 Tangenten und den Berührungspunkt auf einer derselben bestimmt (§ 53a). Auf einer dieser Tangenten sei ein Punkt gegeben, durch welchen die zweite Tangente an den Kegelschnitt gelegt werden soll (§ 55b).

d) Ein Kegelschnitt sei durch 4 Tangenten und den Berührungspunkt auf einer derselben bestimmt. Man soll auf einer der übrigen Tangenten den Berührungspunkt finden (§ 55c).

e) Ein Kegelschnitt sei durch 3 Tangenten und die Berührungspunkte auf zweien derselben bestimmt. Auf einer dieser letzteren Tangenten sei ein Punkt gegeben, durch welchen die zweite Tangente an den Kegelschnitt gelegt werden soll (§ 55c).

l) Ein Kegelschnitt sei durch 3 Tangenten und die Berührungspunkte auf zweien der- mit der 6ten Seite des 6-Ecks muss auf der Geraden G liegen. $(p,1)$ ist also diese 6te Seite und ihr Schnittpunkt mit der durch 5 gezogenen Graden der gesuchte Punkt des Kegelschnitts.

β) Ein Kegelschnitt sei durch 5 Punkte bestimmt; man soll in einem dieser Punkte die Tangente an den Kegelschnitt ziehen (§ 55β).

γ) Ein Kegelschnitt sei durch 4 Punkte und die Tangente in einem derselben bestimmt (§ 53α). Durch einen dieser Punkte sei eine Gerade gezogen, auf welcher der zweite Schnittpunkt mit der Curve bestimmt werden soll (§ 55β).

δ) Ein Kegelschnitt sei durch 4 Punkte und die Tangente in einem derselben bestimmt. Man soll in einem der übrigen Punkte die Tangente an die Curve ziehen (§ 55γ).

ε) Ein Kegelschnitt sei durch 3 Punkte und die Tangenten in zweien derselben bestimmt. Durch einen dieser letzteren Punkte ist eine Gerade gezogen, auf welcher der zweite Schnittpunkt mit der Curve bestimmt werden soll (§ 55γ).

λ) Ein Kegelschnitt sei durch 3 Punkte und die Tangenten in zweien derselben

selben bestimmt. Man soll auf der dritten Tangente den Berührungspunkt finden (§ 55d).

bestimmt. Man soll in dem dritten Punkte die Tangente an die Curve ziehen (§ 55δ).

II. Abschnitt.

Pol und Polare.

§ 57. Pol und Polare.

a) Ein Punkt und eine Gerade heissen Pol und Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt, wenn die entsprechenden Elemente der Originalfigur Pol und Polare in Bezug auf denjenigen Kreis sind, dessen perspectivische Abbildung der gegebene Kegelschnitt darstellt (§ 34 a und α, § 51α).

Wenn der Punkt p der Pol der Geraden P ist, so ist P die Polare von p.

Wenn die Gerade P die Polare von p ist, so ist p der Pol von P.

b) Die Sätze in § 34b und β, so wie die Sätze, Definitionen und Auflösungen von Aufgaben in § 35 und 36, welche an dem angeführten Orte für die Kreislinie bewiesen sind, gelten auch für jeden Kegelschnitt.

Beweis. Man zeige, dass die von jenen Sätzen aufgestellten Eigenschaften der Figuren projectivisch sind, das heisst, dass aus ihrer Gültigkeit für eine bestimmte Figur auch ihre Gültigkeit für jede perspectivische Abbildung jener Originalfigur folgt. Der Beweis dieser Behauptung ist unter Benutzung von § 44 und 45 und der Definition in § 57a in jedem Falle sehr leicht. Alsdann folgt aber unmittelbar, dass jene Sätze auch für einen beliebigen Kegelschnitt Geltung haben, denn ein solcher kann als perspectivische Abbildung eines Kreises angesehen werden.

§ 58. Reciproke Figuren.

Zu jeder Figur in der Ebene des Kegelschnitts C kann man mit Hülfe des letztern eine andere Figur construiren, welche der gegebenen Figur reciprok genannt wird und von ihr in folgender Weise abhängt.

a) Jedem Punkte der ersten Figur entspricht eine Gerade der zweiten Figur, nämlich

α) Jeder Geraden der ersten Figur entspricht ein Punkt der zweiten Figur, nämlich ihr

seine Polare in Bezug auf den Kegelschnitt C.

Pol in Bezug auf den Kegelschnitt.

Ueber den Zusammenhang beider Figuren ergeben sich aus dem Früheren folgende Gesetze.

b) Wenn Punkte der einen Figur auf einer Geraden P liegen, so gehen die entsprechenden Geraden der andern Figur durch den der Geraden P homologen Punkt p (den Pol von P).

c) Einer Punktreihe der einen Figur entspricht ein projectivischer Strahlenbüschel der andern.

Der Träger der Punktreihe und der Scheitel des Büschels sind entsprechende Elemente.

β) Wenn Gerade der einen Figur durch einen Punkt p gehen, so liegen die entsprechenden Punkte der andern Figur auf der dem Punkte p entsprechenden Geraden P (der Polaren von p).

γ) Einem Strahlenbüschel der einen Figur entspricht eine projectivische Punktreihe der andern.

Der Scheitel des Strahlenbüschels und der Träger der Punktreihe sind entsprechende Elemente.

Beweis.

Die Punkte der gegebenen Punktreihe und die Schnittpunkte der entsprechenden Geraden mit dem Träger der Reihe sind einander conjugirt und bilden eine involutorische Reihe (§ 57b, § 35a). Die Behauptung folgt also aus § 30a, § 16a und § 18a.

Die Strahlen des gegebenen Strahlenbüschels und die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte mit dem Scheitel des Büschels sind einander conjugirt und bilden einen involutorischen Strahlenbüschel (§ 57a, § 36α). Die Behauptung folgt also aus § 30α, § 16α und § 18a.

Fortsetzung. § 59.

a) Den Punkten eines Kegelschnitts der einen Figur entsprechen die Tangenten eines Kegelschnitts der andern Figur.

α) Den Tangenten eines Kegelschnitts der einen Figur entsprechen die Punkte eines Kegelschnitts der andern Figur.

Beweis.

Ein Kegelschnitt C der ersten Figur kann durch zwei projectivische Strahlenbüschel S und

Ein Kegelschnitt der ersten Figur kann durch zwei projectivische Punktreihen erzeugt

S' erzeugt werden. Den Strahlenbüscheln S und S' entsprechen in der andern Figur zwei Punktreihen P und P' welche ebenfalls unter sich projectivisch sind (§ 58γ, § 18a). Den Schnittpunkten entsprechender Strahlen von S und S' sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte von P und P' homolog. Die Behauptung folgt daher aus § 52β.

b) Den Punkten des Kegelschnitts C in der einen Figur entsprechen die Tangenten desselben Kegelschnitts in der andern Figur (§ 57b, § 34b).

c) Vier Tangenten A, B, C, D eines Kegelschnitts bestimmen ein vollständiges Vierseit und ihre Berührungspunkte a, b, c, d, ein vollständiges Viereck. Je zwei Diagonalen des ersteren schneiden sich in einem Nebeneck des letzteren.

werden. Den Punktreihen P und P' entsprechen in der andern Figur zwei Strahlenbüschel S und S', welche ebenfalls unter sich projectivisch sind (§ 58c, § 18a). Den Verbindungslinien von P und P' sind die Schnittpunkte entsprechender Strahlen von S und S' homolog. Die Behauptung folgt daher aus § 52b.

β) Den Tangenten des Kegelschnitts C in der einen Figur entsprechen die Punkte desselben Kegelschnitts in der andern Figur (§ 57b, § 34β).

γ) Vier Punkte a, b, c, d eines Kegelschnitts bestimmen ein vollständiges Viereck und ihre Tangenten A, B, C, D, ein vollständiges Vierseit. Je zwei Nebenecken des erstern liegen auf einer Diagonale des letzteren.

Beweise.

Das vollständige Vierseit A, B, C, D und das volländige Viereck a, b, c, d sind reciproke Figuren. Die Nebenecken des Letzteren entsprechen den Diagonalen des Ersteren, sind also die Pole dieser Diagonalen. Die Behauptung folgt deshalb direct aus § 57b, § 36c.

Das vollständige Viereck a, b, c, d und das vollständige Vierseit A, B, C, D sind reciproke Figuren. Die Diagonalen des Letzteren entsprechen den Nebenecken des Ersteren, sind also die Polaren dieser Nebenecken. Die Behauptung folgt also direct aus § 57b, § 36γ.

§ 60. Uebungen.

1) Wenn die Diagonalen eines einbeschriebenen (einfachen) Vierecks sich in dem Punkte n (Fig. 39) schneiden, so liegen die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten auf der Polaren oh von n.

2) Den zugeordneten Satz auszusprechen und zu beweisen.

3) Wenn eine Sehne sich um den Punkt p dreht, so beschreibt der Schnittpunkt der in ihren Endpunkten gezogenen Tangenten die Polare von p.

4) Den zugeordneten Satz auszusprechen und zu beweisen.

5) Wenn man zu jedem Punkte der Geraden A denjenigen Punkt der Geraden B sucht, welcher ihm conjugirt ist, so entstehen auf A und B zwei projectivische Punktreihen.

6) Den zugeordneten Satz auszusprechen und zu beweisen.

7) Welches ist der geometrische Ort für diejenigen Strahlen, welche conjugirte Punkte zweier Geraden A und B verbinden, wenn

α) A und B sich nicht auf dem Kegelschnitte treffen,

β) A und B sich in einem Punkte m des Kegelschnitts treffen?

Andeutung α). Diese Strahlen umhüllen einen Kegelschnitt. Tangenten desselben sind auch diejenigen Geraden, welche den gegebenen Kegelschnitt in seinen Schnittpunkten mit A und B berühren.

β) Die Strahlen gehen alle durch einen Punkt. Durch denselben gehen die beiden Geraden, welche den gegebenen Kegelschnitt in denjenigen Punkten berühren, welche er, ausser m, mit den Geraden A und B gemein hat.

8) Die zugeordneten Fragen zu stellen und zu lösen.

9) Zwei Seiten eines einbeschriebenen Dreiecks werden von jeder Geraden, welche den Pol der dritten Seite enthält, in conjugirten Punkten geschnitten (7).

10) Den zugeordneten Satz auszusprechen und zu beweisen.

11) Wenn man durch jeden Punkt m einer Geraden A denjenigen Strahl zieht, welcher der Verbindungslinie von m mit einem festem ausserhalb A gelegenen Punkte C conjugirt ist, so hüllen diese Strahlen einen Kegelschnitt ein. Nur, wenn die Gerade A und die Polare B von b sich auf dem gegebenen Kegelschnitt schneiden, so gehen diese Strahlen durch einen Punkt.

12) Den zugeordneten Satz auszusprechen und zu beweisen.

13) Kegelschnitte zu bestimmen, von welchen ein Polardreieck gegeben ist und

α) ein Curvenpunkt, welcher auf keiner Seite des Polardreiecks liegt;

β) eine Tangente, welche durch kein Eck des Polardreiecks geht;

γ) ein Curvenpunkt auf einer Seite des Polardreiecks;

δ) eine Tangente, welche durch ein Eck des Polardreicks geht;

ε) zwei conjugirte Punkte auf einer Seite, welche Secante des Kegelschnitts ist*);

ζ) zwei conjugirte Strahlen eines Ecks, welches ausserhalb des Kegelschnitts gelegen ist;

η) zu einem Punkte einer Seite, welche Secante des Kegelschnitts ist, die durch das gegenüberliegende Eck gehende Polare.

Andeutung. In allen Fällen gibt es unendlich viele Kegelschnitte. Die Kegelschnitte α) gehen durch 4 feste Punkte (§ 57b, § 36c § 14, 12). Die Kegelschnitte β) haben 4 feste Tangenten (§ 14, 13). In den

*) Die conjugirten Punkte müssen alsdann beide innerhalb der Dreieckseite liegen oder dieselbe einschliessen.

übrigen Fällen haben die Kegelschnitte 2 Punkte und die Tangenten in diesen Punkten gemeinsam. Man verwende zum Beispiel zur Auffindung von γ und ε § 57b, § 36a, § 33, 10β und 12β.

14) Kegelschnitte zu bestimmen, in Bezug auf welche der Punkt p Pol der Geraden P ist, wenn noch gegeben sind:

α) zwei Curvenpunkte, welche nicht auf P liegen;

β) zwei Tangenten, welche nicht durch p gehen;

γ) ein Punkt, der nicht auf P gelegen ist und die Tangente in demselben;

δ) zwei Paare conjugirter Punkte auf P unter der Voraussetzung, dass P die Curve schneide*);

ε) zwei Paare conjugirter Strahlen, welche durch p gehen, unter der Voraussetzung, dass p ausserhalb der Curve liegt**).

Andeutung. In jedem Falle erhält man unendlich viele Kegelschnitte, welche bezüglich durch 4 feste Punkte gehen (α), 4 feste Gerade berühren (β) oder zwei Punkte und die Tangenten in denselben gemein haben.

15) Kegelschnitte zu bestimmen, für welche die Punkte p und q Pole der Geraden P und Q sind, unter der Voraussetzung, dass pq Secante der Curven sei***).

Andeutung. Unendlich viele Kegelschnitte, welche zwei Punkte und die Tangenten in denselben gemein haben.

16) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, von welchem ein Polardreieck pqz gegeben ist und

α) zwei Punkte, die auf keiner Seite liegen (13α und § 56α 1);

β) zwei Tangenten, die durch keinen Eckpunkt gehen (§ 13β und § 53a 1);

γ) ein Punkt, der auf keiner Seite liegt und eine Tangente, welche durch kein Eck geht (13α und § 54, 13 oder 13β und § 54, 16);

δ) zwei conjugirte Punkte, welche auf einer Seite pq liegen unter der Voraussetzung, dass diese Seite Secante der Curve sei und ein Curvenpunkt, welcher auf keiner Seite liegt (13ε und § 53a, 3);

ε) zwei solche conjugirte Punkte und eine Tangente, welche durch keinen Eckpunkt geht (13ε und § 53a, 3);

ζ) auf jeder von zwei Seiten, welche Secanten der Curve sind, zwei conjugirte Punkte (§ 33, 13β);

η) ein Punkt p, welcher auf keiner Seite des Dreiecks liegt und seine Polare P.

Andeutung. In jedem Falle existirt nur ein Kegelschnitt oder deren zwei, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen. Bei η) ist durch die gegebenen Stücke die involutorische Reihe conjugirter Punkte auf jeder Seite des Polardreiecks bestimmt, da aber immer ein Eck des

---

*) Das eine Paar conjugirter Punkte muss von dem andern eingeschlossen sein.

**) Wie müssen unter dieser Voraussetzung die gegebenen Paare conjugirter Elemente gegen einander liegen?

***) Die gegebenen Punkte müssen alsdann in demselben der durch P und Q gebildeten Winkel oder in zwei Scheitelwinkeln liegen.

Polardreiecks innerhalb und die beiden andern ausserhalb der Curve liegen müssen, so wird nur dann ein Kegelschnitt möglich sein, wenn p und P so liegen, dass die auf zwei Dreieckseiten bestimmten involutorischen Gebilde Doppelpunkte haben.

17) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, so dass der Punkt p der Pol der Geraden P ist, wenn zugleich gegeben sind:

α) drei Curvenpunkte (14α und § 53α, 1);

β) zwei Punkte und eine Tangente (zwei Auflösungen. — 14α und § 54, 13);

γ) zwei Tangenten und ein Curvenpunkt (zwei Auflösungen. — 14β und § 54, 15);

δ) drei Tangenten (14β und § 53a, 1);

ε) zwei Punkte und die Tangente in einem derselben;

ζ) zwei Tangenten und der Berührungspunkt auf einer derselben.

18) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, so dass die Punkte p und q Pole der Geraden P und Q sind, wenn vorausgesetzt wird, dass pq Secante der Curve ist und ausserdem gegeben ist:

α) ein Curvenpunkt (15 und § 53α, 3);

β) eine Tangente (15 und § 53a, 3).

19) Ein gemeinschaftliches Polardreieck zweier Kegelschnitte anzugeben, wenn diese Kegelschnitte

α) 4 Punkte a, b, c, d,

β) 4 Tangenten A, B, C, D,

γ) zwei Punkte a, b und die Tangenten in denselben gemeinsam haben.

Andeutung. α) Das durch die Nebenecken des vollständigen Vierecks der Punkte a, b, c, d, gebildete Dreieck. β) Das durch die Diagonalen des vollständigen Vierseits der Geraden A, B, C, D gebildete Dreieck. γ) Jedes Dreieck, welches zwei conjugirte Punkte der Secante ab und den Pol dieser Geraden zu Ecken hat.

20) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, welcher den Bedingungen von $16, \delta$ oder $18, \alpha$ genügt, wenn man annimmt, dass die Gerade pq die Curve nicht trifft.

Andeutung. Je zwei conjugirte Punkte von pq und der Pol dieser Geraden bilden ein Polardreieck. Nach § 14, 12 kann man also beliebig viele Punkte des Kegelschnitts bestimmen. Nach § 53α existirt nur ein Kegelschnitt, welcher den Bedingungen der Aufgabe genügt.

21) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, welcher den Bedingungen $16, \varepsilon$ oder $18, \beta$ genügt, wenn man annimmt, dass die Gerade pq die Curve nicht trifft.

Andeutung. Je zwei conjugirte Punkte von pq und der Pol dieser Geraden bilden ein Polardreieck. Nach § 14, 13 kann man beliebig viele Tangenten des Kegelschnitts bestimmen. Nach § 53a existirt nur ein Kegelschnitt, welcher den Bedingungen der Aufgabe genügt.

22) Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn, unter der Voraussetzung, dass die Gerade G die Curve nicht schneidet, die involutorische Reihe der conjugirten Punkte auf G bestimmt ist (d. h. wenn auf G zwei imaginäre Curvenpunkte gegeben sind. — Siehe die Anmerkung zu § 36), und ausserdem

α) drei Curvenpunkte a, b, c gegeben sind oder

β) zwei Curvenpunkte a, b und die Tangente A in a.

Andeutung. Man kann im Falle α) für die Schnittpunkte von G mit ab, bc, ca und im Falle β) für die Schnittpunkte von G mit ab und A die Polaren bestimmen. Wende 20) an.

23) Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn unter der Voraussetzung, dass der Punkt m innerhalb der Curve liegt, der involutorische Strahlenbüschel, welchen die durch m gehenden conjugirten Strahlen bilden, bekannt ist (d. h. wenn die beiden durch m gehenden imaginären Tangenten der Curve gegeben sind), und ausserdem

α) drei Tangenten A, B, C gegeben sind oder

β) zwei Tangenten A, B und der Berührungspunkt a der einen.

Andeutung. Man bestimme die Pole der Linien, welche im Falle α) die Schnittpunkte der Geraden A, B, C mit m verbinden und im Falle β) die Pole der Geraden, welche von m nach dem Punkte a und dem Schnittpunkte von A und B gezogen sind (wende 21) an).

24) Zu beweisen, dass in dem Falle 19, α und β nur ein einziges gemeinschaftliches Polardreieck beider Curven existirt.

Andeutung. Wenn ausserdem der Punkt p und die Gerade P einen Pol und seine Polare in Bezug auf beide Kegelschnitte darstellen würden, so müssten die Kegelschnitte zusammenfallen. Man beweist dies durch 16, η, wenn man annimmt, dass p auf keiner Seite des Polardreiecks liegt oder nach 16, δ und 20 (bezüglich für 19, β durch 16, ε und 21), wenn man annimmt, dass p auf einer Seite des Polardreiecks liege.

25) Wenn zwei Kegelschnitte 4 gemeinsame Punkte und 4 gemeinsame Tangenten haben, wie die beiden Kegelschnitte, welche als Lösung von 16, γ auftreten, welche Lage haben alsdann die Nebenecken in dem vollständigen Viereck der gemeinsamen Punkte und die Diagonalen in dem vollständigen Vierseit der gemeinsamen Tangenten?

Andeutung. Das Dreieck der Nebenecken fällt mit dem Dreieck der Diagonalen zusammen (24).

26) Wenn zwei Kegelschnitte K und K' einer Ebene entsprechende Figuren zweier perspectivischer Systeme sind, so entsprechen sich

α) die Polaren homologer Punkte und

β) die Pole homologer Geraden

in beiden Figuren.

Andeutung. α) Wenn man durch den Punkt m des einen Systemes zwei Secanten von K zieht, so entsprechen ihnen zwei durch den entsprechenden Punkt m' gehende Secanten von K'. Die Polaren theilen diese Secanten harmonisch und die Behauptung folgt aus § 44 d.

27) Unter den Bedingungen 26) entsprechen zwei Punkten der einen Figur, welche in Bezug auf K conjugirt sind, solche Punkte der andern Figur, welche in Bezug auf K' conjugirt sind.

28) Unter den Bedingungen 26) sind ferner

α) zwei Punkte der Projectionsaxe, welche in Bezug auf K conjugirt sind, zugleich in Bezug auf K' conjugirt und

β) zwei durch den Projectionsmittelpunkt gehende Strahlen, welche in Bezug auf K conjugirt sind, müssen auch in Bezug auf K' conjugirt sein.

Anmerkung. Der Träger einer involutorischen Reihe conjugirter Punkte, welche zwei Kegelschnitten gemeinsam ist, heisst eine eigentliche oder uneigentliche gemeinschaftliche Sehne beider Kegelschnitte, je nachdem die involutorische Reihe zwei Doppelpunkte hat oder keine solche. Das Centrum eines involutorischen Strahlenbüschels conjugirter Strahlen, welcher zwei Kegelschnitten gemeinschaftlich ist, heisst der Scheitel eines eigentlichen oder uneigentlichen Tangentenwinkels, je nachdem der involutorische Büschel zwei Doppelstrahlen hat oder keine solche (Anmerkung zu § 36).

29) Unter den Bedingungen 26) ist die Projectionsaxe eine eigentliche oder uneigentliche gemeinschaftliche Sehne gleichartiger Lage und der Projectionsmittelpunkt ist der Scheitel eines eigentlichen oder uneigentlichen gemeinschaftlichen Tangentenwinkels gleichartiger Lage (§ 54, 22γ und δ).

30) Die Gerade G sei für zwei Kegelschnitte K und K' derselben Ebene eine gemeinschaftliche Sehne gleichartiger Lage (§ 54, 22γ). Man soll zwei perspectivische Systeme bestimmen, in welchen G die Projectionsaxe und K, K' entsprechende Curven sind.

Andeutung. Die Pole m und m' von G müssen entsprechende Punkte sein. Wenn ausserdem p ein Punkt von G ist, welcher ausserhalb der beiden Kegelschnitte liegt und die Polaren P und P' von p die beiden Kegelschnitte bezüglich in a, b und a', b' schneiden, so sind zwei perspectivische Systeme bestimmt, wenn man die Punkte a und a' entsprechend setzt. Ein zweites Paar perspectivischer Systeme findet man, wenn a und b' entsprechend gesetzt werden. Zum Beweise unterscheide man die Fälle, wo G eine eigentliche Secante der Kegelschnitte mit den Schnittpunkten r und s oder eine uneigentliche Secante beider Kegelschnitte ist. Im ersten Falle erwäge man, dass der Kegelschnitt des zweiten Systemes, welcher dem Kegelschnitt K des ersten entspricht, die Geraden $m'r$ und $m's$ in r und s berühren und durch a' gehen muss. Er muss also nach § 53α mit K zusammenfallen. Im zweiten Falle bemerke man, dass für diesen durch a' gehenden Kegelschnitt G und P' die Polaren von m' und p sind. Er muss also nach Aufgabe 20) mit K' zusammenfallen.

31) G sei eine gemeinschaftliche Sehne zweier Kegelschnitte. Man soll die (zwei oder vier) gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte aufsuchen.

Andeutung. Durch 30) kommt man auf zwei Projectionsmittelpunkte. Sie sind die Scheitel von eigentlichen oder uneigentlichen gemeinsamen Tangentenwinkeln (§ 54, 22β).

32) Der Punkt m sei für zwei Kegelschnitte K und K' derselben Ebene der Scheitel eines gemeinschaftlichen Tangentenwinkels gleichartiger Lage. Man soll zwei perspectivische Systeme bestimmen, in welchen m der Projectionsmittelpunkt und K, K' entsprechende Curven sind.

Andeutung. Man kommt zu zwei Auflösungen, wenn man den der Andeutung zu 30) dualistisch zugeordneten Weg verfolgt.

33) m sei der Scheitel eines für zwei Kegelschnitte gemeinsamen

Tangentenwinkels. Man soll die (zwei oder vier) gemeinschaftlichen Punkte der Kegelschnitte finden.

Andeutung. Durch 32) kommt man zu zwei Projectionsaxen, welche eigentliche oder uneigentliche gemeinschaftliche Sehnen beider Kegelschnitte sind.

34) Wenn zwei gemeinschaftliche Punkte von K und K' bekannt sind, so soll man die übrigen finden (31 und 33).

35) Wenn zwei gemeinschaftliche Tangenten von K und K' bekannt sind, so soll man die übrigen finden (33 und 31).

36) Wenn durch einen Punkt p Secanten eines Kegelschnitts gezogen werden, welche denselben in den Punktepaaren $a, a'; b, b'; c, c' \ldots$. treffen, so werden diese Punktepaare aus jedem Punkte s des Kegelschnitts durch einen involutorischen Strahlenbüschel projicirt.

Andeutung. Die Strahlenbüschel $a\ (b, b', c, c' \ldots)$ und $a'\ (b', b, c', c \ldots)$ sind nach § 60, 1; § 16b unter sich projectivisch. Da aber nach § 52a auch $a'\ (b', b, c', c \ldots)$ und $a\ (b', b, c', c \ldots)$ projectivisch sind, so folgt nach § 52a die Projectivität von $a\ (b, b', c, c' \ldots)$ und $a\ (b', b, c', c \ldots)$ und die Behauptung folgt aus § 30β und § 54, 9.

37) Wenn man in der Ebene eines Kegelschnitts einen Punkt p als Mittelpunkt und seine Polare P als Axe eines involutorischen Systemes annimmt, so sind

α) je zwei Schnittpunkte des Kegelschnitts mit einer durch p gezogenen Geraden zugeordnete Punkte und

β) je zwei Tangenten des Kegelschnitts, welche durch einen Punkt von P gezogen sind, stellen zugeordnete Geraden vor.

38) Wenn die zugeordneten Strahlen eines involutorischen Strahlenbüschels, dessen Scheitel s auf einem Kegelschnitt gelegen ist, den letzteren in den Punktepaaren $a, a'; b, b'; c, c' \ldots$ treffen, so gehen die Geraden aa', bb', $cc' \ldots$ durch einen Punkt.

Andeutung. Man sehe den Schnittpunkt von aa' und bb' als den Punkt p an, von welchem in 37 die Rede ist und führe mit Hülfe von 37 und § 31b einen indirecten Beweis.

39) Ein involutorischer Strahlenbüschel sei durch zwei Paare zugeordneter Strahlen bestimmt. Man soll mit Hülfe von 38) zu jedem weitern Strahle den zugeordneten finden.

Andeutung. Man ziehe einen Kreis, welcher durch den Scheitel des Büschels geht.

40) Es sind zwei concentrische involutorische Strahlenbüschel gegeben. Man soll das gemeinsame Paar zugeordneter Strahlen finden.

Andeutung. Man ziehe einen Kreis durch den Scheitel. Die beiden involutorischen Strahlenbüschel führen nach 38) zu zwei Punkten pa, deren Verbindungslinien den Kegelschnitt in zwei Punkten treffen, welche auf den gesuchten Strahlen liegen.

41) Diejenigen conjugirten Strahlen einer involutorischen Reihe zu bestimmen, welche zu zwei durch den Scheitel gezogenen Geraden harmonisch liegen.

III. Abschnitt.

Der Kegelschnitt und die unendlich ferne Gerade.

Eintheilung der Kegelschnitte. § 61.

Die Kegelschnitte zerfallen in 3 Arten:

a) Die Kegelschnitte der 1. Art enthalten keinen unendlich fernen Punkt. Sie bestehen aus einer in sich geschlossenen Curve.

b) Die Kegelschnitte der 2. Art enthalten zwei unendlich ferne Punkte. Sie bestehen aus zwei getrennten Aesten, welche beiderseits ins Unendliche verlaufen. In der Ebene eines solchen Kegelschnitts existiren zwei Gerade, welche als Tangenten der unendlich fernen Curvenpunkte zu betrachten sind und Asymptoten heissen. Die beiden Seiten eines jeden Curvenastes scheinen gegen die Asymptoten zu convergiren, erreichen jedoch dieselben in dem endlichen Raum der Ebene nicht.

c) Die Kegelschnitte der 3. Art enthalten einen unendlich fernen Punkt. Die unendlich ferne Gerade ist als Tangente der Curve in diesem Punkte zu betrachten. Diese Curven bestehen aus einem Aste, welcher beiderseits ins Unendliche verläuft.

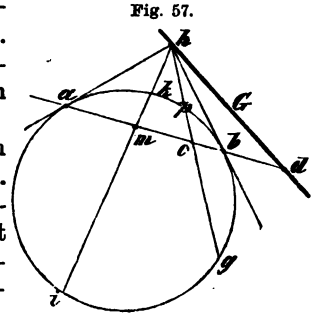
Beweis. Ein Kegelschnitt ist die perspectivische Abbildung eines Kreises. Es können nun 3 Fälle eintreten:

a) Die Gegenaxe G der Originalebene trifft den Kreis nicht (Fig. 57).

b) Die Gegenaxe G der Originalfigur trifft den Kreis in 2 getrennten Punkten n und e (Fig. 58).

c) Die Gegenaxe G berührt den Kreis in einem Punkte c (Fig. 59).

Fig. 57.

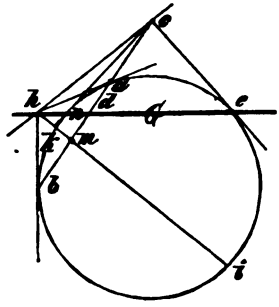


Im ersten Falle kann der Kegelschnitt keinen unendlich fernen Punkt enthalten, weil demselben in der Originalfigur ein gemeinsamer Punkt der Gegenaxe und des Kreises entsprechen müsste, welcher der Annahme nach nicht existirt (vergl. § 48).

Im zweiten Falle enthält der Kegelschnitt zwei unendlich ferne Punkte n' und e', welche den Punkten n und l der Originalfigur Fig. 58 entsprechen (§ 48). Den Tangenten nc und lc

der Kreispunkte n und l müssen in der Abbildung zwei Gerade entsprechen, welche als Tangenten der unendlich fernen Punkte n' und l' anzusehen sind. Den beiden Kreisbogen nal und nbl entsprechen zwei Curvenäste, von welchen jeder beiderseits nach den unendlich fernen Punkten n' und l' verläuft.

Fig. 58.



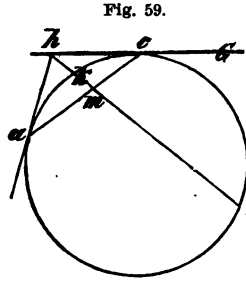
Im dritten Falle enthält der Kegelschnitt einen unendlich fernen Punkt c', welcher dem Punkte c der Originalfigur Fig. 59 entspricht. Der Gegenaxe G der Originalfigur, welche den Kreis in c berührt, entspricht die unendlich ferne Gerade der Abbildung, welche als Tangente des Kegelschnitts in c' anzusehen ist. Der Kegelschnitt besteht aus einem Aste, der beiderseits gegen den Punkt c' ins Unendliche verläuft.

§ 62. Die Kegelschnitte der 1. und 2. Art haben einen Mittelpunkt.

a) In jedem Kegelschnitte der ersten und zweiten Art existirt ein Punkt (Mittelpunkt der Curve), welcher die durch ihn gezogenen Sehnen (Durchmesser der Curve) halbirt.

Beweis. Derjenige Kreis, dessen perspectivische Abbildung der vorliegende Kegelschnittt ist, wird durch die Gegenaxe G (Fig. 57 und 58) der Originalebene nicht berührt. Die durch den Pol c dieser Gegenaxe gezogenen Secanten des Kreises werden daher von derselben harmonisch getheilt. Dem Punkte c entspricht nun in der Ebene des Kegelschnitts ein Punkt c' von der Art, dass die durch ihn gezogenen Secanten durch die unendlich ferne Gerade harmonisch getheilt werden (§ 44d). Aus § 12c folgt daher, dass dieser Punkt der Mittelpunkt der durch ihn gezogenen Sehnen ist.

Fig. 59.



Zusätze. **b)** Der Mittelpunkt eines Kegelschnitts der ersten oder zweiten Art ist als Pol der unendlich fernen Geraden anzusehen.

c) Jeder Durchmesser ist die Polare eines unendlich fernen Punktes (vergl. b und die §§ 57b, 35, c und γ).

d) Der Mittelpunkt eines Kegelschnitts der ersten Art liegt innerhalb der Curve. Der Mittelpunkt eines Kegel-

schnitts der zweiten Art liegt ausserhalb der Curve. Die durch ihn gezogenen Tangenten sind die Asymptoten des Kegelschnitts der zweiten Art.

Beweis. Wenn der vorliegende Kegelschnitt von der 1ten Art ist, so liegt der Punkt c der Originalfigur innerhalb des Kreises (§ 34b) und die Behauptung folgt aus § 51. Ist der Kegelschnitt von der 2ten Art, so liegt der Punkt c der Originalfigur ausserhalb des Kreises. Die von c an den Kreis gelegten Tangenten cn und cl (Fig. 58) berühren den Kreis in den Punkten n und l der Gegenaxe. Die entsprechenden Geraden der Abbildung sind Tangenten des Kegelschnitts (§ 45a) und berühren denselben in den unendlich fernen Punkten n' und l'.

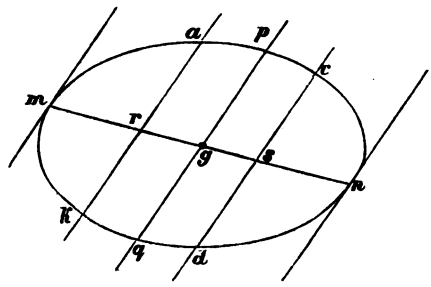
Conjugirte Durchmesser. § 63.

a) Je zwei conjugirte Strahlen, welche sich in dem Mittelpunkte eines Kegelschnitts schneiden, heissen conjugirte Durchmesser. Die conjugirten Durchmesser eines Kegelschnitts bilden einen involutorischen Strahlenbüschel. Derselbe enthält zwei Doppelstrahlen (die Asymptoten der Curve) oder keine solche, je nachdem der Kegelschnitt von der zweiten oder ersten Art ist.

Der Beweis folgt aus dem nach § 57b auch für Kegelschnitte gültigen § 36α und § 62d.

b) Jeder von zwei conjugirten Durchmessern ist mit denjenigen Geraden parallel, welche den Kegelschnitt in den Endpunkten des andern berühren. Jeder von zwei conjugirten Durchmessern halbirt diejenigen Sehnen, welche mit dem andern parallel sind (Fig. 60).

Fig. 60.



Beweis. Wenn zwei Durchmesser conjugirt sind, so befindet sich nach § 62c und dem auch für Kegelschnitte (§ 57b) gültigen § 35β der Pol eines jeden in dem unendlich fernen Punkt des andern. Die erste Behauptung folgt also aus dem für Kegelschnitte (§ 57b) gültigen § 34β und 22a. Um den zweiten Theil des Satzes zu beweisen, sehe man diejenigen Sehnen, welche einem Durchmesser parallel sind, als Strahlen eines Strahlen-

büschels an, dessen Scheitel in dem unendlich fernen Punkte des Durchmessers gelegen ist (§ 22b). Der unendlich ferne Punkt dieses Durchmessers und seine Polare, der zugehörige conjugirte Durchmesser, theilen nach § 57b, § 36b die parallelen Sehnen harmonisch, das heisst, diese Sehnen werden von dem letzteren Durchmesser halbirt (§ 12c).

§ 64. Einbeschriebene und umbeschriebene Parallelogramme.

a) In jedem Parallelogramme, welches einem Kegelschnitt umbeschrieben ist, fällt der Schnittpunkt der Diagonalen mit dem Mittelpunkte der Curve zusammen. Die Diagonalen selbst sind conjugirte Durchmesser des Kegelschnitts.

α) In jedem Parallelogramme, welches einem Kegelschnitt einbeschrieben ist, fällt der Schnittpunkt der Diagonalen mit dem Mittelpunkte der Curve zusammen. Die Seiten des Parallelogrammes sind mit zwei conjugirten Durchmessern parallel.

Beweis a). Das Parallelogramm kann als ein vollständiges Vierseit angesehen werden. Von den Ecken desselben sind zwei Paare durch die gegenüberliegenden Eckpunkte des Parallelogrammes dargestellt, während das dritte Paar aus den unendlich fernen Punkten gebildet ist, welche je zwei parallele Seiten gemein haben. Die Diagonalen des vollständigen Vierseits sind also durch die unendlich ferne Gerade und die Diagonalen des Parallelogrammes dargestellt. Aus dem nach § 57b für Kegelschnitte gültigen § 36γ folgt daher, dass die Diagonalen des Parallelogramms sich in dem Pole der unendlich fernen Geraden schneiden und dass dieselben conjugirte Strahlen sind. Die Behauptung folgt somit aus § 63a.

α) Die Ecken des Parallelogrammes können als Eckpunkte eines vollständigen Vierecks angesehen werden. Die Gegenseiten des letzteren sind durch die gegenüberliegenden Seiten des Parallelogrammes und durch seine Diagonalen dargestellt. Von den Nebenecken des vollständigen Vierecks sind also zwei unendlich fern, während das dritte in den Schnittpunkt der Diagonalen fällt. Aus dem für Kegelschnitte gültigen § 36c folgt nun, dass der Schnittpunkt der Diagonalen der Pol der unendlich fernen Geraden ist und dass diejenigen Geraden, welche man durch diesen Punkt mit den Seiten des Parallelogramms parallel ziehen kann, Seiten eines Polardreiecks und somit conjugirte Strahlen sind. Die Behauptung ergibt sich also aus § 62b und § 63a.

b) Die Berührungspunkte der Seiten eines umbeschriebenen Parallelogrammes bilden wieder ein Parallelogramm, dessen Seiten mit den Diagonalen des ersten parallel sind.

β) Die Tangenten in den Eckpunkten eines einbeschriebenen Parallelogrammes bilden wieder ein Parallelogramm, dessen Diagonalen mit den Seiten des ersten parallel sind.

Beweis b). Das umbeschriebene Parallelogramm stellt ein vollständiges Vierseit dar, dessen Diagonalen durch die unendlich ferne Gerade und die Diagonalen des Parallelogrammes repräsentirt sind und ein Polardreieck bilden. Das Viereck der Berührungspunkte kann als vollständiges Viereck betrachtet werden, dessen Nebenecken nach § 59c in den Ecken jenes Polardreiecks liegen. Zwei dieser Nebenecken müssen daher in die unendlich fernen Punkte der Diagonalen des umbeschriebenen Parallelogrammes fallen, worin der Beweis gelegen ist. Der Beweis von β) ist analog.

Die Kegelschnitte der 3. Art haben keinen Mittelpunkt. § 65.

a) Ein Kegelschnitt der dritten Art hat keinen Mittelpunkt. Es gibt nur eine Tangente eines solchen Kegelschnitts, welche einer gegebenen Geraden parallel ist. Der Berührungspunkt einer Tangente und die Mittelpunkte der mit ihr parallelen Sehnen liegen auf einer Geraden, welche ein Durchmesser der Curve heisst. Die Durchmesser eines Kegelschnitts der dritten Art sind parallel und nach dem unendlich fernen Punkte der Curve gerichtet.

Beweis. Der Mittelpunkt ist der Pol der unendlich fernen Geraden (§ 62b). Da aber in der Originalfigur der Pol c der Gegenaxe G (Fig. 59), welcher dem Mittelpunkte des Kegelschnitts entspricht, auf der Gegenaxe selbst gelegen ist, wenn der gegebene Kegelschnitt der 3ten Art angehört, so fällt der gesuchte Mittelpunkt eines solchen Kegelschnitts in die unendlich ferne Gerade, das heisst, er existirt nicht in dem endlichen Raume der Ebene. Um die weiteren Behauptungen zu erweisen, nehme man eine Schaar paralleler Sehnen des Kegelschnitts an. Diesen Sehnen und denjenigen mit denselben parallelen Tangenten, welche etwa an den Kegelschnitt gezogen werden können, entsprechen in der Originalfigur die Strahlen eines Strahlenbüschels, dessen Scheitel h auf der Gegenaxe G der Originalfigur liegt. Durch h gehen 2 Tangenten hc, und ha desjenigen Kreises, von welchem der Kegelschnitt eine perspectivische Abbildung ist. Der Tangente

hc entspricht die unendlich ferne Gerade in der Ebene des Kegelschnitts und der Tangente ha entspricht eine Tangente des Kegelschnitts, welche den gezogenen Sehnen parallel ist.

Der Geraden ac, welche die durch h gehenden Sehnen des Kreises harmonisch theilt, entspricht eine Sehne des Kegelschnitts, welcher die gegebenen parallen Sehnen halbirt (§ 12c) und Durchmesser genannt wird. Dieser Durchmesser geht durch den Berührungspunkt a' derjenigen Tangente, welche mit den von ihm halbirten Sehnen parallel ist. Die Durchmesser des Kegelschnitts sind unter sich parallel, weil sie nach dem unendlich fernen Punkte c' des Kegelschnitts gehen.

§ 66. Axen der Kegelschnitte.

a) Jeder Kegelschnitt der ersten und zweiten Art enthält zwei conjugirte Durchmesser, welche einen rechten Winkel bilden.

α) Enthält ein Kegelschnitt mehr als ein Paar conjugirter Durchmesser, die einen rechten Winkel bilden, so ist derselbe ein Kreis.

Beweis a) folgt aus § 63a und § 32a.

α). Wenn ein Kegelschnitt zwei Paare conjugirter Durchmesser enthält, welche rechte Winkel bilden, so stehen je zwei conjugirte Durchmesser senkrecht auf einander (§ 63a und Anmerkung zu § 32a). Jedes umbeschriebene Parallelogramm ist deshalb ein Rhombus (§ 64a und I. § 29, 2), dessen Seiten von dem Schnittpunkt der Diagonalen gleichweit entfernt sind. Die Curve ist also ein Kreis, weil ihre Tangenten von dem Mittelpunkte der Curve gleiche Entfernung haben.

b) Erklärung. Wenn ein Kegelschnitt nur ein Paar conjugirter Durchmesser enthält, welche einen rechten Winkel bilden, so heissen dieselben Axen des Kegelschnitts. Die Endpunkte der Axen heissen Scheitelpunkte der Curve.

c) Die Axen eines Kegelschnitts sind Symmetrielinien der Curve. Die Tangenten in den Endpunkten einer Axe stehen auf derselben senkrecht.

Beweis. Jede Axe ist die Halbirungssenkrechte derjenigen Sehnen, welche mit der zweiten Axe parallel gehen (§ 63b), woraus die erste Behauptung folgt. Die zweite ergibt sich ebenfalls aus § 63b.

d) Die Axen eines Kegelschnitts der zweiten Art halbiren die von den Asymptoten gebildeten Winkel. (§ 32a.)

e) Jeder Kegelschnitt der dritten Art enthält einen Durchmesser, welcher auf den von ihm halbirten Sehnen senkrecht steht (Axe der Curve).

Beweis. Man ziehe Sehnen der Curve, welche zu der gemeinsamen Richtung aller Durchmesser senkrecht stehen. Die Mittelpunkte dieser Sehnen liegen auf einer Geraden (§ 65a), welche die in dem Satze angegebenen Eigenschaften hat.

f) Die Axe eines Kegelschnitts der dritten Art ist eine Symmetrielinie der Curve und bildet mit der Tangente des auf ihr gelegenen Curvenpunktes (Scheitelpunkt der Curve) einen rechten Winkel.

Beweis. Die Axe ist die Mittelsenkrechte der von ihr halbirten Sehnen (e) und deshalb Symmetrieaxe der Figur. Die zweite Behauptung folgt aus § 65a.

Uebungen. § 67.

1) Die Polaren der Punkte eines Durchmessers sind mit dem conjugirten Durchmesser parallel.

2) Von einem Kegelschnitte sind der Mittelpunkt m und die Richtungen von 2 Paaren conjugirter Durchmesser gegeben, man soll

α) zu einer durch m gezogenen Richtung die Richtung des conjugirten Durchmessers finden,

β) in einem gegebenen Curvenpunkte die Tangente ziehen,

γ) auf einer gegebenen Tangente den Berührungspunkt finden.

3) Wenn man die Endpunkte eines Durchmessers mit einem beliebigen Curvenpunkte verbindet, so erhält man zwei Richtungen, welche mit zwei conjugirten Durchmessern parallel sind.

4) Der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke, welche eine gegebene Strecke zur Grundlinie haben, während die übrigen Seiten mit zugeordneten Strahlen eines involutorischen Strahlenbüschels parallel sind, ist ein Kegelschnitt.

5) Den Satz 3) für den Fall auszusprechen, wo je zwei zugeordnete Strahlen des gegebenen involutorischen Strahlenbüschels senkrecht auf einander stehen.

6) Die Schnittpunkte zweier parallelen Tangenten und einer dritten Tangente bestimmen mit dem Mittelpunkte zwei conjugirte Durchmesser.

7) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kegelschnitte, für welche die Richtungen von zwei Paaren conjugirter Durchmesser gegeben sind, wenn diese Kegelschnitte

α) durch zwei gegebene Punkte a und b gehen sollen,

β) eine gegebene Gerade A in einem Punkte a berühren sollen,

γ) zwei gegebene Gerade A und B berühren sollen?

Andeutung. α) Die durch die Mitte von ab gehende Richtung, welche zu ab conjugirt ist. β) Die durch a gehende Richtung, welche zu A conjugirt ist. γ) Zwei Gerade, welche durch den Schnittpunkt von A und B gehen, zu A und B harmonisch und zugleich mit zwei conjugirten Durchmessern parallel sind (§ 60, 40). Zum Beweise § 63b und für γ) § 64a; § 14, 3.

8) Dieselben Fragen zu lösen, wenn statt der Richtungen von zwei Paaren conjugirter Durchmesser die Richtungen der Asymptoten gegeben sind.

9) Die Fragen 7) zu beantworten, wenn die gegebenen Richtungen conjugirter Durchmesser rechte Winkel einschliessen.

10) Auf einer Seite eines einem Kegelschnitt umbeschriebenen Parallelogrammes ist der Berührungspunkt gegeben, man soll die Berührungspunkte der andern Seiten finden.

11) In einem Eckpunkte eines einem Kegelschnitt einbeschriebenen Parallelogrammes ist die Tangente gegeben. Man soll die Tangenten in den übrigen Endpunkten finden.

12) Man soll die Richtungen von einem Paare conjugirter Durchmesser angeben, wenn der Mittelpunkt des Kegelschnitts und

α) zwei Curvenpunkte,
β) ein Curvenpunkt und seine Tangente,
γ) zwei Tangenten

gegeben sind.

13) Alle Kegelschnitte, welche den Mittelpunkt, die Richtungen zweier conjugirter Durchmesser und einen Punkt gemeinsam haben, sind demselben Parallelogramme umbeschrieben. Man soll dieses Parallelogramm construiren.

14) Alle Kegelschnitte, welche den Mittelpunkt, die Richtungen zweier conjugirter Durchmesser und eine Tangente gemeinsam haben, sind demselben Parallelogramme einbeschrieben. Man soll dieses Parallelogramm construiren.

15) Wenn je zwei conjugirte Durchmesser eines Kegelschnitts mit zwei conjugirten Durchmessern eines andern Kegelschnitts parallel sind, so ist die involutorische Reihe conjugirter Punkte auf der unendlich fernen Geraden beiden Kegelschnitten gemeinsam.

16) Die Kegelschnitte 15) haben die reellen oder imaginären Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden gemeinsam.

17) Alle Kreise haben die involutorische Reihe conjugirter Punkte auf der unendlich fernen Geraden gemeinsam.

18) Alle Kreise haben dieselben imaginären Punkte der unendlich fernen Geraden gemeinsam.

19) Zwei Kegelschnitte K und K', welche der Bedingung 15) genügen, als entsprechende Curven zweier perspectivischer Systeme darzustellen, so dass die unendlich ferne Gerade zur Projectionsaxe wird (zwei Auflösungen).

20) Die perspectivischen Systeme 19) sind ähnlich.

Andeutung. Je zwei entsprechende Gerade sind parallel (§ 47β; § 50, 7) und daher die entsprechenden Dreiecke ähnlich.

21) Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn der Mittelpunkt, die Richtungen von 2 Paaren conjugirter Durchmesser und

α) ein Curvenpunkt (2α, 13),

β) eine Tangente (2α, 14)

gegeben sind.

22) Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn der Mittelpunkt, die Richtungen zweier conjugirter Durchmesser und

α) zwei Punkte (12α und 21α),

β) ein Punkt und die Tangente in demselben (12β und 21α oder 21β),

γ) zwei Tangenten (12γ und 21β)

gegeben sind.

23) Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn der Mittelpunkt, die Richtungen zweier conjugirter Durchmesser und

α) die Länge beider Durchmesser (12α und 21α),

β) die Länge des einen und ein Curvenpunkt (12α und 21α),

γ) die Länge des einen und eine Tangente,

δ) ein Curvenpunkt und eine Tangente

gegeben sind.

Andeutung. γ) Man bestimme die Tangenten in den Endpunkten des Durchmessers und wende 12γ und 21β an. δ) Durch Anwendung von 13) und § 54, 13 oder von 14) und § 54, 16 erhält man zwei Auflösungen.

24) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, wenn der Mittelpunkt gegeben ist und

α) 3 Curvenpunkte (12α und 21α),

β) 2 Curvenpunkte und die Tangente in einem derselben (12β und 21α),

γ) 2 Tangenten und der Berührungspunkt auf einer derselben (12β und 21β),

δ) 3 Tangenten (12γ und 21β).

25) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, wenn der Mittelpunkt, der Pol p einer Geraden P und ausserdem

α) ein Curvenpunkt (§ 60, 18α, bezüglich § 60, 20),

β) eine Tangente (§ 60, 18β)

gegeben sind.

26) Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn die Richtungen von 2 Paaren conjugirter Durchmesser und

α) 3 Curvenpunkte,

β) 2 Curvenpunkte und die Tangente in einem derselben,

γ) 2 Tangenten und der Berührungspunkt auf einer derselben,

δ) 3 Tangenten

gegeben sind.

Andeutung. Wende 7) an.

27) Die Aufgabe 26) auszusprechen, wenn die gegebenen Richtungen conjugirter Durchmesser senkrecht auf einander stehen.

28) Die Aufgabe 26) zu lösen, wenn statt der Richtungen conjugirter Durchmesser die Richtungen der Asymptoten gegeben sind.

29) Die Sätze des § 55 auszusprechen und die zugehörigen Figuren zu zeichnen, wenn der in Rede stehende Kegelschnitt der dritten Art

angehört. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Richtung der Hauptaxe den Berührungspunkt der unendlich fernen Geraden bestimmt und umgekehrt

Andeutung. Beispielsweise folgen die Sätze:

α) A, B, C, D, E seien 5 Tangenten. Wenn man durch den Schnittpunkt (BC) eine Parallele mit E und durch (CD) eine Parallele mit A zieht, so liefern diese Geraden einen Schnittpunkt, welcher auf der Verbindungslinie von (AB) und (DE) liegt (§ 55a).

β) A, B, C, D seien 4 Tangenten. Schneidet man jede mit der folgenden, so entstehen 3 Punkte m, n, p. Wenn man durch m eine Parallele mit D und durch p eine Parallele mit A zieht, so liegt der Schnittpunkt derselben mit n auf einer zur Axe parallelen Geraden (§ 55, b).

γ) Wenn man durch jeden von zwei Curvenpunkten a und b eine Parallele zur Axe zieht und dieselbe mit einer durch den andern Punkt gezogenen Geraden (Secante) schneidet, so ist die Verbindungslinie der erhaltenen Punkte mit derjenigen Geraden parallel, welche die durch die Secanten bestimmten neuen Curvenpunkte verbindet (55β).

δ) Die von a aus gezogenen Tangenten B und C mögen von einer dritten Tangente D in b und c geschnitten werden. a, b, c bestimmen ein Parallelogramm, dessen vierter Eckpunkt mit den Berührungspunkten von B und C auf einer Geraden liegt. Zugleich liegt der Berührungspunkt von D mit dem vierten Eckpunkt des Parallelogramms auf einer zur Axe parallelen Geraden (§ 55c).

ε) Zieht man durch die Eckpunkte eines einbeschriebenen Dreiecks abc Parallelen mit der Axe und schneidet man dieselben bezüglich mit den gegenüberliegenden Seiten, so entsteht ein Dreieck, dessen Seiten mit den Tangenten in a, b, c parallel sind (§ 55γ).

ζ) b und c seien die Berührungspunkte der durch a gezogenen Tangenten. Die Punkte a, b, c bestimmen ein Parallelogramm, dessen durch a gezogene Diagonale mit der Axe parallel ist (§ 55d).

η) Durch jeden von zwei Curvenpunkten a und b soll eine Parallele zu der Axe gezogen und ihr Schnittpunkt mit der Tangente in dem andern Punkte bestimmt werden. Die Verbindungslinie der erhaltenen Punkte ist alsdann mit ab parallel (§ 55, δ).

30) Ein Kegelschnitt der 3. Art sei durch 4 Tangenten bestimmt.

α) Man soll durch einen Punkt, welcher auf einer dieser Tangenten beliebig angenommen ist, die zweite Tangente an die Curve ziehen (Aufgabe 29α).

β) Man soll den Berührungspunkt auf einer dieser Tangenten bestimmen (§ 55b und § 67, 29).

γ) Man soll die Richtung der Axe finden (Aufgabe 29β).

31) Ein Kegelschnitt der 3. Art sei durch 3 Tangenten A, B, C und den Berührungspunkt auf A bestimmt.

α) Man soll durch einen Punkt, welcher auf einer der Tangenten gegeben ist, die zweite Tangente an den Kegelschnitt ziehen (§ 55b und § 67, Aufgabe 29),

β) den Berührungspunkt auf B und C bestimmen (Aufgabe 29δ),

γ) die Richtung der Axe bestimmen (Aufgabe 29δ).

32) Ein Kegelschnitt der 3. Art sei durch 3 Tangenten und die Richtung der Axe bestimmt.

α) Man soll durch einen Punkt, welcher auf einer der Tangenten gegeben ist, die zweite Tangente an die Curve legen (Aufgabe 29 γ).

β) Man soll die Berührungspunkte dieser Tangenten bestimmen (Aufgabe 29 δ).

33) Ein Kegelschnitt der 3. Art sei durch 3 Punkte und die Richtung der Axe bestimmt.

α) Durch einen dieser Punkte sei eine Gerade gezogen, auf welcher der 2. Schnittpunkt mit der Curve bestimmt werden soll (Aufgabe 29 γ).

β) Man soll in den gegebenen Punkten die Tangenten an die Curve legen (Aufgabe 29, ε).

34) Ein Kegelschnitt der 3. Art sei durch zwei Tangenten und ihre Berührungspunkte bestimmt.

α) Man soll durch einen Punkt, welcher auf einer dieser Tangenten gegeben ist, die 2. Tangente an die Curve legen (Aufgabe 29, δ).

β) Man soll die Richtung der Axe finden (Aufgabe 29, ζ).

35) Ein Kegelschnitt der 3. Art sei durch 2 Punkte a und b, die Tangente in a und die Richtung der Axe bestimmt.

α) Man soll auf einer durch a gezogenen Richtung den Schnittpunkt mit der Curve bestimmen (Aufgabe 29 ε).

β) Man soll in b die Tangente an die Curve ziehen (Aufgabe 29, η).

36) Ein Kegelschnitt der 3. Art sei durch 2 Tangenten A und B, den Berührungspunkt auf A und die Richtung der Axe bestimmt.

α) Man soll durch einen auf A gegebenen Punkt die zweite Tangente an die Curve legen (Aufgabe 29, δ).

β) Man soll den Berührungspunkt auf B bestimmen (Aufgabe 29 ζ).

37) α) Zwei ähnliche Punktreihen in schiefer Lage erzeugen einen Kegelschnitt der 3. Art.

β) Zwei Tangenten eines Kegelschnitts der 3. Art werden von den übrigen Tangenten in ähnlichen Punktreihen geschnitten.

38) Folgende Sätze über die Kegelschnitte der 3. Art zu beweisen.

α) Der Abstand je zweier conjugirter Punkte eines Durchmessers wird durch den auf diesem Durchmesser gelegenen Curvenpunkt halbirt.

β) Zwei mit einer Tangente parallele Strahlen sind conjugirt, wenn der durch sie gebildete Streifen von der Tangente halbirt wird.

γ) Wenn man durch jeden Eckpunkt eines einbeschriebenen Dreiecks den Durchmesser zieht und den Schnittpunkt desselben mit der gegenüberliegenden Seite bestimmt, so entsteht ein Polardreieck.

δ) Wenn man durch die Ecken eines umbeschriebenen Dreiecks Parallelen zu den gegenüber liegenden Seiten zieht, so entsteht ein Polardreieck.

ε) Die Polardreiecke γ) und δ) fallen zusammen, wenn die Seiten des umbeschriebenen Dreiecks die Tangenten in den Ecken des einbeschriebenen Dreiecks sind.

39) Kegelschnitte der 3. Art anzugeben, für welche ein gegebenes Dreieck Polardreieck ist.

Andeutung. Es gibt unendlich viele Kegelschnitte, welche der Aufgabe genügen. Die Mittelpunkte der Seiten des gegebenen Polar-

dreiecks bilden die Ecken eines allen diesen Kegelschnitten umbeschriebenen Dreiecks.

40) Kegelschnitte der 3. Art anzugeben, für welche der Punkt p Pol von der Geraden P ist, wenn zugleich

α) eine Tangente,
β) die Richtung der Axe

gegeben ist.

Andeutung. Die unendlich vielen Kegelschnitte der 3. Art, welche der Aufgabe genügen, haben im ersten Falle 3 Tangenten gemeinsam, während sie im Falle β) eine feste Gerade in demselben Punkte berühren und die Richtung der Axe (den Berührungspunkt der unendlich fernen Geraden) gemeinsam haben.

41) Einen Kegelschnitt der 3. Art zu bestimmen, wenn

α) 4 Curvenpunkte a, b, c, d,

β) 3 Curvenpunkte a, b, c und die Tangente A in a,

γ) 2 Curvenpunkte a, b, eine Tangente A, welche durch keinen dieser Punkte geht und die Richtung der Axe,

δ) 3 Tangenten A, B, C und ein Curvenpunkt d, welcher auf keiner dieser Tangenten liegt, gegeben sind. (In jedem Falle erhält man 2 Auflösungen.)

Andeutung. α) Wenn man durch einen beliebigen Punkt Parallelen zu den Gegenseiten des vollständigen Vierecks a, b, c, d zieht und die Doppelstrahlen des dadurch bestimmten involutorischen Büschels zieht (§ 33, 5), so stellen diese die Axenrichtungen von zwei Kegelschnitten vor, welche der Aufgabe genügen (§ 54, 13). β) Kann als besonderer Fall von α) aufgefasst werden (vergleiche auch § 54, 15). γ) Kann als besonderer Fall von § 54, 15 dargestellt werden. Von der in Betracht kommenden involutorischen Reihe des Trägers A ist der Mittelpunkt und ein Paar zugeordneter Punkte bekannt. Zur Auflösung von δ) wird § 54, 16 und § 33, 8 verwendet.

42) Einen Kegelschnitt der 3. Art zu bestimmen, wenn ein Polardreieck gegeben ist und

α) eine Tangente (§ 60, 16β),
β) ein Punkt (2 Auflösungen. — § 60, 16γ).

43) Einen Kegelschnitt der 3. Art zu bestimmen, wenn der Punkt p der Pol der Geraden P sein soll und

α) zwei Punkte (2 Auflösungen. — § 60, 17β),

β) eine Tangente und ein Curvenpunkt (2 Auflösungen. — § 60, 17γ),

γ) zwei Tangenten (§ 60, 17δ),

δ) ein Curvenpunkt und die Richtung der Axe (§ 60, 17ε),

ε) eine Tangente und die Richtung der Axe (§ 60, 17ζ)

gegeben sind.

44) Einen Kegelschnitt der 3. Art zu bestimmen, wenn die Punkte p und q die Pole von den Geraden P und Q sein sollen (§ 60, 18β).

IV. Abschnitt.

Identität der Kegelschnitte mit den Curven des ersten Cursus.

Identität der Kegelschnitte mit den Curven des ersten Cursus. § 68.

a) Jede Ellipse ist ein Kegelschnitt der 1. Art.	**α)** Jeder Kegelschnitt der 1. Art ist eine Ellipse.
Jede Hyperbel ist ein Kegelschnitt der 2. Art.	Jeder Kegelschnitt der 2. Art ist eine Hyperbel.
Jede Parabel ist ein Kegelschnitt der 3. Art.	Jeder Kegelschnitt der 3. Art ist eine Parabel.

Beweis a). C sei eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel (man benutze die Figur 61, in welcher C ein Kreis ist), f ein Brennpunkt der Curve und mop das von den Tangenten der Punkte a, b, c gebildete Dreieck. Nach § 3f, § 6f, § 9h ist $\sphericalangle cfp = afp$ und $\sphericalangle cfo = bfo$. Daraus folgt, dass $\sphericalangle pfo = \frac{1}{2} afb$. Denkt man sich den Punkt c mit seiner Tangente beweglich, so bleibt der Winkel pfo immer von gleicher Grösse, die Strahlen fp und fo beschreiben zwei congruente Strahlenbüschel und die Punkte o und p zwei projectivische Punktreihen. Es folgt also aus § 52β, dass die Curve C ein Kegelschnitt ist. Wenn C eine Ellipse ist, so ist dieser Kegelschnitt von der 1. Art, weil die Ellipse keinen unendlich fernen Punkt hat. Wenn C eine Hyperbel ist, so muss der Kegelschnitt von der zweiten Art sein, weil die Hyperbel zwei unendlich ferne Punkte hat, nämlich die Berührungspunkte der Asymptoten mit der Hyperbel (§ 7a). Wenn C eine Parabel ist, so wird der Kegelschnitt der 3. angehören, weil die Parabel keinen Mittelpunkt haben kann, was man daraus erkennt, dass ein solcher auf der Axe der Parabel liegen müsste (§ 8c), welche die Curve nur in einem Punkte trifft.

Fig. 61.

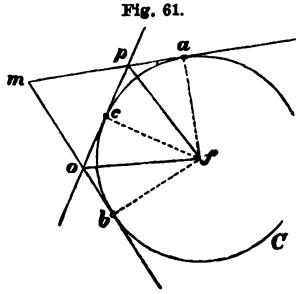
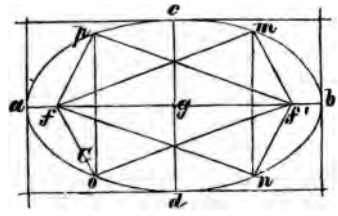
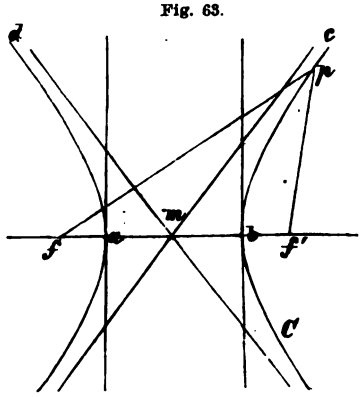


Fig. 62.



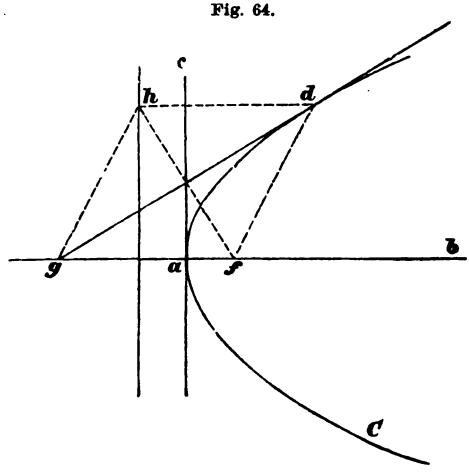
α) 1) ab und cd (Fig. 62) seien die beiden Axen (§ 66) eines Kegelschnitts C der ersten Art. Man kann nun nach § 2b § 1b eine Ellipse construiren, deren Axen ab und cd sind und diese Ellipse stellt nach a) ebenfalls einen Kegelschnitt dar. Die beiden Kegelschnitte fallen aber zusammen, weil sie ausser den Punkten a, b, c, d noch die Tangenten dieser Punkte gemeinsam haben (§ 53α).

Fig. 63.



2) mc und md (Fig. 63) seien die Asymptoten eines Kegelschnitts C der zweiten Art (§ 61b). ab sei diejenige Axe dieses Kegelschnitts, welche denselben in zwei Punkten (a und b) trifft (§ 66 und Auflösung von § 41γ). Man kann nun nach § 7c eine Hyperbel construiren, welche die Punkte a und b zu Scheitelpunkten und die Geraden mc und md zu Asymptoten hat. Diese Hyperbel ist aber nach a) ebenfalls ein Kegelschnitt. Die beiden Kegelschnitte fallen zusammen, weil sie die Punkte a und b, die unendlich fernen Punkte der Asymptoten und die Tangenten in diesen 4 Punkten gemeinsam haben (§ 53α).

Fig. 64.



3) ab (Fig. 64) sei die Axe eines Kegelschnitts der 3. Art und a der Scheitelpunkt desselben. d sei ein weiterer Punkt der Curve und dg seine Tangente. Man kann eine Parabel construiren (§ 9g), welche ab zur Axe, a zum Scheitelpunkt hat und in dem Punkte d von der Geraden gd berührt wird. Diese Parabel ist aber nach a) ebenfalls ein Kegelschnitt. Beide Kegelschnitte haben den Punkt a, den Punkt d, den Gegenpunkt von d in Bezug auf die Axe ab (§ 66e) und die Tangenten dieser drei Punkte gemein und fallen deshalb nach § 53 zusammen.

Uebungen. § 69.

1) Jeder Kegelschnitt der 1. und 2. Art besitzt zwei Brennpunkte, jeder Kegelschnitt der 3. Art einen solchen (§ 68α, § 1a, § 4a, § 8a).

2) Je zwei conjugirte Strahlen eines Brennpunktes stehen senkrecht auf einander (§ 10, 23).

3) Bei jedem Kegelschnitt wird die Polare eines Brennpunktes die diesem Brennpunkte zugehörige Leitlinie oder Directrix genannt. Man soll nun zeigen, dass diejenige Linie, welche schon in § 8 Leitlinie der Parabel genannt ist, wirklich die Polare des Brennpunktes sei (§ 67, Aufgaben 1 und 38α).

4) Der Tangentenabschnitt, welcher von dem Berührungspunkt bis zur Leitlinie reicht, wird aus dem zugehörigen Brennpunkte unter rechtem Winkel gesehen.

5) Die beiden Tangentenabschnitte, welche von dem Berührungspunkte einer Tangente bis zu den Leitlinien reichen, sind die Hypotenusen zweier rechtwinkliger ähnlicher Dreiecke, deren Spitzen in den beiden Brennpunkten liegen (§ 68 und § 3c, § 6c, § 9c).

6) Die Entfernungen der Curvenpunkte von einer Leitlinie und dem zugehörigen Brennpunkte bilden ein constantes Verhältniss.

Andeutung. m sei der Curvenpunkt, o und o' die Schnittpunkte der in m gezogenen Tangente mit den beiden Leitlinien und f, f' die Brennpunkte. Man hat nach 5) $fm : mf' = om : mo'$. Zieht man aber durch m eine Parallele zur Axe, welche die Leitlinien in p und p' trifft, so hat man $om : mo' = pm : mp'$ und daher $fm : mf' = pm : mp'$. Hieraus folgt $fm + mf' : fm = pp' : pm$ oder $fm : pm = 2a : pp'$. Den Werth pp' findet man, wenn man das Quadrat von a durch die Excentricität theilt. Man beweist dies, indem man für m einen Scheitelpunkt der Curve wählt und fm, sowie pm durch die grosse Axe, die Excentricität und pp' darstellt.

7) Inwiefern kann man von 2 Kegelschnitten, welche einen Brennpunkt gemeinsam haben, sagen, dass sie zwei imaginäre Tangenten gemein hätten (§ 57b und Anmerkung zu § 36)?

8) Inwiefern kann man von 2 confocalen Kegelschnitten sagen, dass sie zwei Paare imaginärer Tangenten gemein hätten?

9) Es sei Aufgabe gestellt: Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn ein Brennpunkt und

α) 3 Tangenten

β) 2 Tangenten und der Berührungspunkt der einen

gegeben sind. Wie kann man diese Aufgaben auf § 60, Aufgabe 23, α und β zurückführen?

10) Es seien die Aufgaben gegeben: Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn ein Brennpunkt, die zugehörige Leitlinie und

α) ein Curvenpunkt,

β) eine Tangente

gegeben sind. Wie kann man diese Aufgaben auf § 60, 16δ und ε zurückführen, unter der Voraussetzung, dass die dort erwähnte Gerade pq die Curve nicht schneide (§ 60, 20)?